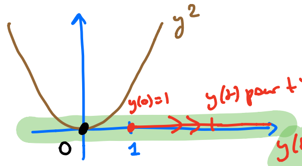
$\boxed{\text{exo 30}}$ "explosion en tps fini"

pb de Cauchy $\begin{cases} y'(t) = y(t)^2 \\ y(0) = 1 \end{cases}$

ED non-linéaire d'ordre 1

du type $y'(t) = f(y(t))$ où $f(y) = y^2$




équilibre : $\ell = 0$

$y(t) \xrightarrow[t\to+\infty]{} +\infty$ — description "qualitative" de la solution au pb de Cauchy

pas encore de formule $y(t) = \dots$ ] "quantitatif"

ED à variables séparables :

$y'(t) = 1 \times y(t)^2$

$\frac{dy}{dt} = y^2$

on sépare les variables !

$\frac{dy}{y^2} = dt$

on primitive : $\int \frac{dy}{y^2} = \int dt$

$\left[ -\frac{1}{y} + cte' = t + cte'' \right]$

$-\frac{1}{y} = t + cte$

on exprime $y$ en fonction de $t$

$\frac{1}{y} = -t - C$

$y(t) = \frac{1}{-t-C}$ où $C \in \mathbb{R}$

ou encore :

$y(t) = \frac{1}{C'-t}$ où $C' \in \mathbb{R}$

$y(0) = 1$ : $\frac{1}{-C} = 1$ $C = -1$

$y(t) = \frac{1}{-t-(-1)} = \frac{1}{-t+1}$

avec la ci $y(0) = 1$ :

$\frac{1}{C'} = 1$ donc $C' = 1$

finalement, le pb posé admet une unique solution

$\boxed{y(t) = \frac{1}{1-t}}$

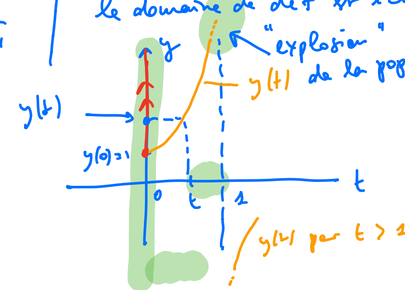
quel est son domaine de définition $\mathbb{R} - \{1\}$ ? pas vraiment...

$[0,1[ \cup ]1,+\infty[$

une sol. d'une équa diff est, par déf. de ce qu'on appelle "solution d'une ED", définie sur un intervalle

$y(t) \xrightarrow[t\to 1^-]{} +\infty$

le domaine de déf est ici : $\underbrace{[0,1[}_{\text{bio}}$ ou $\underbrace{]-\infty,1[}_{\text{maths.}}$




⚠ si $t > 1$
alors $1-t < 0$
donc $y(t) = \frac{1}{1-t} < 0$

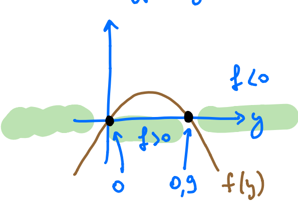
$\boxed{\text{exo 31}}$ 2 modèles de pêche

$n(t)$ pop. de poissons $t \geq 0$

$n(0) = 0,2$

1er modèle $n'(t) = \underbrace{n(t)\left(1-n(t)\right)}_{\text{modèle logistique normalisé } (K=1 \text{ et } r=1)} \underbrace{-0,1\,n(t)}_{\text{pêche proportionnelle à } n(t)}$

du type $y'(t) = f(y(t))$ ? $f(y) = y(1-y) - 0,1y = y(1-0,1-y) = y(0,9-y)$

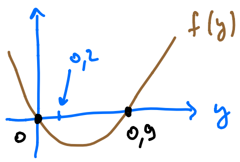



les équilibres de l'équation sont : $\ell = 0$ et $\ell' = 0,9$ (solu°s de $f(y) = 0$)

Comportement de $n(t)$ qd $t \to +\infty$ :

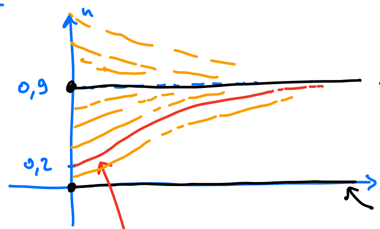

$y(t) \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0,9$

Si





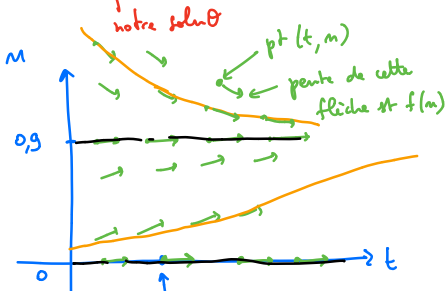
ici $y(t) \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$




sol. de $n(t) = 0,9 \ \forall t \geq 0$ (équilibre $\ell = 0,9$)

sol de $n(t) = 0 \ \forall t \geq 0$ (éq. $\ell = 0$)

notre sol^n




pt $(t, n)$

pente de cette flèche est $f(n)$

ici $n'(t) < 0$

$n'(t) = f(n(t))$

ici $n'(t) > 0$

ici $n' = 0$

pente de la solution $t \mapsto n(t)$

$$y'(t) = \cos(t + y(t))$$

2ème modèle : $n'(t) = n(t)(1 - n(t)) - 0,1$

taux de prél^t ct (quota)

$$\begin{cases} y'(t) = f(y(t)) \\ \text{où } f(y) = y(1-y) - 0,1 \end{cases}$$

$(y^2 - y + 0,1 = 0)$

équilibre : on résout $f(y) = 0$ c.à-d $-y^2 + y - 0,1 = 0$

$\Delta = 0,6$ $\quad \sqrt{\Delta} = \sqrt{0,6}$

racines $\dfrac{1 \pm \sqrt{\Delta}}{2}$

deux équilibres

$\alpha = \dfrac{1 - \sqrt{\Delta}}{2} \simeq 0,11$

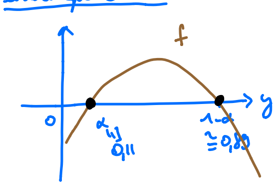
$\beta = \dfrac{1 + \sqrt{\Delta}}{2} \simeq 0,89$

$\beta = 1 - \alpha$ ??

$$\underbrace{\frac{1-\sqrt{\Delta}}{2}}_{\alpha} + \underbrace{\frac{1+\sqrt{\Delta}}{2}}_{\beta} = \frac{1+1}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

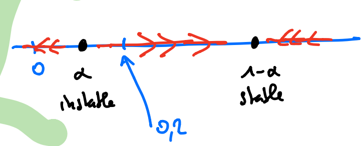
$\beta = 1 - \alpha$ (!)

étude qualitative




$\boxed{\text{ci} : n(0) = 0,2}$ on s'attend à trouver :

$n(t) \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0,89$




résolution de l'équation

On pose $p(t) = n(t) - \alpha$

$\iff n(t) = p(t) + \alpha$

changement de fonction inconnue

$$\begin{cases} n'(t) = n(t)\left(1 - n(t)\right) - 0{,}1 \\ n(0) = 0{,}2 \end{cases}$$

$\rightsquigarrow$ quelle ED vérifiée par $p(t)$ ??

on remplace $n(t)$ par $p(t)+\alpha$ et $n'(t)$ par $p'(t)$

d'où $p'(t) = (p(t)+\alpha)(1 - p(t) - \alpha) - 0{,}1$

$$= p(t) + \alpha - p(t)^2 - \alpha p(t) - \alpha p(t) - \alpha^2 - 0{,}1$$

$$= -p(t)^2 + (1-2\alpha)\,p(t)\,\underbrace{-\alpha^2 + \alpha - 0{,}1}_{=0}$$

donc $p(t)$ la nouvelle fonct° inconnue

vérifie l'équa diff :

$$p'(t) = -p(t)^2 + (1-2\alpha)\,p(t) = p(t)\left(1 - 2\alpha - p(t)\right)$$

$$= \underbrace{\underbrace{(1-2\alpha)}_{r}\, p(t)\left(1 - \frac{p(t)}{\underbrace{1-2\alpha}_{K}}\right)}_{\text{modèle logistique}}$$

modèle logistique

$y'(t) = r\,y(t)\left(1 - \frac{y(t)}{K}\right)$

(!) on sait résoudre l'équation logistique...
(on l'a déjà fait)