<u>exercice 3</u> $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 4 \end{pmatrix}$

$\mathbb{R}^3 \xrightarrow{A} \mathbb{R}^2$

$\underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_{}$ $= \begin{pmatrix} x+2y+3z \\ 4x+2y+4z \end{pmatrix}$

une application linéaire, continue qq soit le choix des normes sur $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}^2$

$|||A||| = ?$

① $\|\cdot\|_\infty$ sur $\mathbb{R}^3$ et sur $\mathbb{R}^2$

$\longrightarrow$ $\underbrace{\|A(x,y,z)\|_\infty}_{} \leq \underset{\text{cte ?}}{10} \|(x,y,z)\|_\infty \quad \forall (x,y,z) \in \mathbb{R}$

$\|A(x,y,z)\|_\infty = \max(|x+2y+3z|, |4x+2y+4z|) \overset{?}{\leq} 10 \max(|x|,|y|,|z|) = 10\|(x,y,z)\|_\infty$

car
$\left\{ \begin{array}{l} \underbrace{|x+2y+3z|}_{} \leq ? \ 6 \max(|x|,|y|,|z|) \\ \quad \hookrightarrow \leq |x| + |2y| + |3z| = \underbrace{|x|}_{} + 2\underbrace{|y|}_{} + 3\underbrace{|z|}_{} \\ \qquad \leq \max + 2\max + 3\max = 6 \max \\ |4x+2y+4z| \leq 10 \max(|x|,|y|,|z|) \end{array} \right.$

$|4x+2y+4z| \underset{x,y,z \text{ tous} > 0 \text{ ou tous} < 0}{\leq} 4|x| + 2|y| + 4|z| \underset{x,y,z \text{ tous ... égaux}}{\leq} 10 \max(|x|,|y|,|z|)$

donc : $|||A||| \leq 10$

de plus $\|(1,1,1)\|_\infty = 1$
$A(1,1,1) = (6,10)$ donc $\|A(1,1,1)\|_\infty = 10$] donc $\|A(1,1,1)\|_\infty = 10 \|(1,1,1)\|_\infty$

donc $|||A||| = 10$ $\left[\text{car } |||A||| = \sup_{(x,y,z) \neq (0,0,0)} \dfrac{\|A(x,y,z)\|_\infty}{\|(x,y,z)\|_\infty} = 10 \right]$
≤ 10

$(1,1,1)$ unique ?
non...
$(2,2,2)$
$(-1,-1,-1)$

$\dfrac{\|A(\lambda,\lambda,\lambda)\|_\infty}{\|(\lambda,\lambda,\lambda)\|_\infty} = \dfrac{\|\lambda A(1,1,1)\|_\infty}{\|\lambda(1,1,1)\|_\infty} = \dfrac{|\lambda|}{|\lambda|} \underbrace{\left(\dfrac{\|A(1,1,1)\|_\infty}{\|(1,1,1)\|_\infty} \right)}_{10} = 10$

② $\|\cdot\|_1$ sur $\mathbb{R}^3$ $\|\cdot\|_\infty$ sur $\mathbb{R}^2$

$A(x,y,z) = (x+2y+3z, 4x+2y+4z)$

① on cherche $M \geq 0$ tq $\|A(x,y,z)\|_\infty \leq M \|(x,y,z)\|_1 \quad \forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$

$\left\{ \begin{array}{l} |x+2y+3z| \leq |x| + 2|y| + 3|z| \leq 3(|x|+|y|+|z|) = 3\|(x,y,z)\|_1 \\ |4x+2y+4z| \leq 4|x| + 2|y| + 4|z| \leq 4(|x|+|y|+|z|) = 4\|(x,y,z)\|_1 \end{array} \right.$

donc $\|A(x,y,z)\|_\infty \leq 4 \|(x,y,z)\|_1 \quad \forall (x,y,z)$ $\qquad 4 = \max(3,4)$

$\qquad \qquad 3 + \frac{1}{2}$

$\| = \max(|x+2y+3z|, |4x+2y+4z|)$

donc $|||A||| = 4$

$\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)$? $\longrightarrow A\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right) = \left(\frac{7}{4}, \frac{7}{2}\right)$ bof...

$(1,0,0)$? $\longrightarrow A(1,0,0) = (1,4)$ $\left. \begin{array}{l} \|A(1,0,0)\|_\infty = 4 \\ \|(1,0,0)\|_1 = 1 \end{array} \right)$ ok

$\to (0,0,1)$ ok aussi

$\to (1,0,1)$ aussi !

③ $\|\cdot\|_1$ sur $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}^2$ $\quad A(x,y,z) = (x+2y+3z,\ 4x+2y+4z)$

on cherche $M \geq 0$ tq $\|A(x,y,z)\|_1 \leq M \|(x,y,z)\|_1 \quad \forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$

$$\begin{aligned}\|A(x,y,z)\|_1 &= |x+2y+3z| + |4x+2y+4z| \\ &\leq |x|+2|y|+3|z| + 4|x|+2|y|+4|z| \\ &= 5|x| + 4|y| + 7|z| \\ &\leq 7\,(|x|+|y|+|z|) = 7\,\|(x,y,z)\|_1\end{aligned}$$

si $x,y,z \geq 0$
$|x+2y+3z| = x+2y+3z$
$= |x|+2|y|+3|z|$

donc $|||A||| \leq 7$

pour $(0,0,1)$: $A(0,0,1) = (3,4)$

$\left.\begin{array}{l}\|A(0,0,1)\|_1 = 3+4 = 7 \\ \|(0,0,1)\|_1 = 0+0+1 = 1\end{array}\right\}$

donc $|||A||| = 7$

$|||A|||_{\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_1}$ arrivée, départ

Ax départ

exercice 5 $\quad E = \mathbb{R}[X]$ ev des polynômes à coeff réels

$P = a_0 + a_1 X + \dots + a_n X^n \in E$

exo : ce sont bien des normes sur E
$$\begin{cases}\|P\|_\infty = \max(|a_0|, |a_1|, \dots, |a_n|) \\ \|P\|_1 = |a_0| + |a_1| + \dots + |a_n| \\ \|P\|_2 = \sqrt{a_0^2 + \dots + a_n^2}\end{cases}$$

3 normes à considérer

$$E \xrightarrow{\varphi} \mathbb{R}$$
$$P \longmapsto P(1)$$

$|\cdot|$

forme linéaire sur E
= AL de E dans $\underbrace{\text{le corps de base}}_{\text{ici } \mathbb{R}}$

φ bien linéaire ? oui :
$$\begin{cases}(P+Q)(1) = P(1) + Q(1) \\ (\lambda P)(1) = \lambda P(1)\end{cases}$$

φ est-elle continue ?

① pour $\|\cdot\|_\infty$ sur E : on cherche $M \geq 0$ tq $|\varphi(P)| \leq M \|P\|_\infty \quad \forall P \in \mathbb{R}[X]$

c-à-d $|P(1)| \leq M \|P\|_\infty \quad \forall P \in \mathbb{R}[X]$

Cadre gal : $E \xrightarrow{u} F$
$\|u(x)\|_F \leq M \|x\|_E$

si $P = a_0 + a_1 X + \dots + a_n X^n$:

$\underbrace{|a_0 + a_1 + \dots + a_n|}_{|P(1)|} \overset{?}{\leq} M \max(|a_0|, |a_1|, \dots, |a_n|)$

on a $|a_0 + \dots + a_n| \leq (n+1) \max(|a_0|, |a_1|, \dots, |a_n|)$

$\longrightarrow |\varphi(P)| \leq (n+1) \|P\|_\infty \quad \forall P \dots$

~~donc φ est continue et $|||\varphi||| \leq (d^\circ P) + 1$~~

$$|||\varphi||| = \sup_{P \neq 0} \frac{|\varphi(P)|}{\|P\|_\infty} \leftarrow +\infty$$

pas borné !

on a en fait plutôt envie de dire que φ n'est pas continue !

pour $P_n = ? = 1 + X + X^2 + \dots + X^n$ alors $|\varphi(P_n)| = n+1$, $\|P_n\|_\infty = 1$

$$\frac{|\varphi(P_n)|}{\|P_n\|_\infty} = n+1 \xrightarrow[n\infty]{} +\infty$$

" $|||\varphi||| = +\infty$ "

② pour $\|\cdot\|_1$ sur E

$$|\varphi(P)| \overset{?}{\leq} n \|P\|_1$$

$$|a_0 + a_1 + \dots + a_n| \leq \underset{?}{n} \left(|a_0| + |a_1| + \dots + |a_n|\right)$$

↑ 1 convient

avec égalité pour $P = 1$

donc φ est continue

et

$|||\varphi||| = 1$

③ pour $\|\cdot\|_2$ sur E

$$|\varphi(P)| \overset{?}{\leq} n \|P\|_2$$

$$|a_0 + a_1 + \dots + a_n| \underset{?}{\leq} n \sqrt{a_0^2 + a_1^2 + \dots + a_n^2}$$

$$\underbrace{(a_0 + a_1 + \dots + a_n)^2}_{a_0^2 + \dots + a_n^2 + 2a_0a_1 + 2a_0a_2 + \dots + 2a_1a_2 + \dots} \leq n^2 \left(\underbrace{a_0^2 + a_1^2 + \dots + a_n^2}\right)$$

p.ex : $P_n = 1 + X + X^2 + \dots + X^n$ ⚠ n est aussi g^d qu'on veut... ←

$|\varphi(P)| = n+1$ $\|P\|_2 = \sqrt{n+1}$

$$\frac{|\varphi(P)|}{\|P\|_2} = \frac{n+1}{\sqrt{n+1}} = \sqrt{n+1} \xrightarrow[n\infty]{} +\infty$$

donc $\sup\limits_{P \neq 0} \dfrac{|\varphi(P)|}{\|P\|_2} = +\infty$ donc φ n'est pas continue

exo2 : $\underbrace{f + f'}_{g} \longmapsto f$

f vérifie l'équa diff $f' + f = g$ ↑

$f(x) = \underbrace{\dots}_{\text{en foncto de } g}$