exercice 5 $\ell^1 = \ell^1(\mathbb{R})$ = ensemble des suites réelles $(x(k))_{k\in\mathbb{N}}$ telles que $\sum_{k\geq 0} |x(k)| < +\infty$

p.ex. $\left(\frac{1}{(k+1)^2}\right)_{k\in\mathbb{N}} \in \ell^1$ $\qquad$ $\left(\frac{1}{k+1}\right)_{k\in\mathbb{N}} \notin \ell^1$

+ distance
norme

$x = (x(k))_{k\in\mathbb{N}} \in \ell^1$ $\qquad$ $\|x\|_1 = ? = \sum_{k\geq 0} |x(k)|$

$x : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$
$\quad k \longmapsto x(k)$

$\mathbb{R}^n \xrightarrow{\|.\|_1} \mathbb{R}$
$x = (x(1), x(2), \dots, x(n)) \longmapsto \|x\|_1 = |x(1)| + \dots + |x(n)|$

une suite individuelle
$\|$
un élt de ℓ^1

$x, y \in \ell^1$

$d_1(x,y) = \|x-y\|_1 = \sum_{k\geq 0} |x(k) - y(k)|$

Mq (ℓ^1, d_1) est complet

Soit… $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy de ℓ^1 (donc : une suite de suites …)

$\uparrow$
chaque x_n est une suite de réels

$$\begin{array}{l} x_0 = (x_0(0), x_0(1), x_0(2), \dots, x_0(k), \dots) \\ x_1 = (x_1(0), x_1(1), x_1(2), \dots, x_1(k), \dots) \\ \vdots \\ x_n = (x_n(0), x_n(1), x_n(2), \dots, x_n(k), \dots) \\ \quad\quad\;\; \downarrow n\infty \qquad\qquad\qquad\quad \downarrow n\infty \\ \vdots \\ x = (x(0), x(1), x(2), \dots\ x(k), \dots) \end{array}$$

$\textcircled{n}\downarrow$

de Cauchy dans ℓ^1

$\sum_{k\geq K} |x(k)|$

① Mq pour chaque $k \in \mathbb{N}$, la suite $(x_n(k))_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans $\mathbb{R}$.

On va mq elle est de Cauchy dans $\mathbb{R}$? oui bonne idée

Soit $\varepsilon > 0$.
Il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $n, p \geq N \longrightarrow \|x_n - x_p\|_1 < \varepsilon$

$\Updownarrow$

$\sum_{k\geq 0} |x_n(k) - x_p(k)| < \varepsilon$

$\Downarrow$

$|x_n(k) - x_p(k)| \leq \sum_{k\geq 0} |x_n(k) - x_p(k)| < \varepsilon$

$|x_n(k) - x_p(k)| \leq \|x_n - x_p\|_1$

↳ donc $(x_n(k))_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy ds $\mathbb{R}$.

(!) $(\mathcal{B}(X,\mathbb{R}), d_\infty)$ complet
$(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de C. $\quad f_n : X \to \mathbb{R}$
pour chaque $x \in X$: $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est de C. ds $\mathbb{R}$
etc…

$|f_n(x) - f_p(x)| \leq \|f_n - f_p\|_\infty$

⟶ une fonction $f : X \to \mathbb{R}$
① f bornée, $f \in \mathcal{B}$
② $f_n \to f$ dans $\mathcal{B}$, $\|\cdot\|_\infty$

Or $\mathbb{R}$ est complet, donc $(x_n(k))_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans $\mathbb{R}$.

Notons $x(k)$ sa limite

On obtient ainsi une suite $x = (x(0), x(1), \dots, x(k), \dots)$

(!) On veut mq :
$\begin{cases} x \in \ell^1 \\ x_n \xrightarrow[n\infty]{} x \text{ dans } \ell^1 \end{cases}$

⟶ ② Mq $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} ; \forall n \geq N, \underbrace{\sum_{k\geq 0}^{+\infty} |x(k) - x_n(k)| \leq \varepsilon}$ ⟵

ceci dit que, si $n \geq N$: $\quad x - x_n \in \ell^1$ et $\|x - x_n\|_1 \leq \varepsilon$

↓

③ $x \in \ell^1$ car : $x = \underbrace{x - x_n}_{\in \ell^1} + \underbrace{x_n}_{\in \ell^1}$

$x_n \xrightarrow[n\infty]{} x$ dans ℓ^1 veut dire : $\forall \varepsilon > 0, \exists N ; \forall n \geq N, d_1(x, x_n) = \|x - x_n\|_1 \leq \varepsilon$

② On sait quoi ?

$(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de C. dans ℓ^1 (donc bornée ...) $\leftarrow$

k fixé : $x_n(k) \xrightarrow[n\infty]{} x(k)$ dans $\mathbb{R}$ $\leftarrow$

$\forall k \in \mathbb{N}, \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} ; \forall n \geq N, |x_n(k) - x(k)| \leq \varepsilon$

remplacer ℓ^1 par ℓ^2

$\to (\ell^\infty, \|.\|_\infty)$ complet $\mathcal{B}(\mathbb{N}, \mathbb{R})$

$\searrow (\ell^2, \|.\|_2)$ est complet

Soit $\varepsilon > 0$

Il existe $N \in \mathbb{N}$; $\forall n, p \geq N$, $\sum_{k=0}^{+\infty} |x_p(k) - x_n(k)| \leq \varepsilon$

$\Big\downarrow p \to +\infty$

$\forall$ n fixé $\geq N$

$\forall p \geq N, \forall j \in \mathbb{N},$

$\forall j \in \mathbb{N}, \forall p \geq N$

$$\sum_{k=0}^{j} |x_p(k) - x_n(k)| \leq \sum_{k=0}^{+\infty} \leq \varepsilon$$

donc en passant à la limite $p \to +\infty$ (ok car somme finie)

$$\sum_{k=0}^{j} |x(k) - x_n(k)| \leq \varepsilon$$

$a_n \geq 0$

$\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ — $S \in \mathbb{R}$ / $+\infty$

$x_p(k) \xrightarrow[p\infty]{} x(k)$

en passant à la limite sur j :

$$\underbrace{\sum_{k=0}^{+\infty} |x(k) - x_n(k)| \leq \varepsilon}_{\text{cette série cv et sa somme est } \leq \varepsilon}$$

exercice 6 (X, d) métrique dont toutes les boules fermées sont compactes

(!) fermé borné $\not\Leftrightarrow$ compact dans un métrique

$\Leftarrow$

(!) ℓ^∞ $S(\bar{0}, 1)$ sphère unité

(1, 0, ---)

(0, 1, 0 --)

(0, 0, ~~1~~, ---)

① Mq (X, d) est complet

Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy de X

Pour mq'elle converge, il suffit de mq'elle a une valeur d'adhérence

Soit $\varepsilon > 0$. $\exists N \in \mathbb{N} ; \forall n, p \geq N, d(x_n, x_p) \leq \varepsilon$

$x_n \in D(x_p, \varepsilon)$ $\nwarrow$ ici $p \geq N$ $\to$ $D(x_N, \varepsilon)$? p.ex $p = N$

Par hypothèse : $D(x_p, \varepsilon)$ est compact

$(x_n)_{n\geq N}$ est une suite de ce cpct, donc on peut en extraire une suite convergente $x_{\phi(n)} \xrightarrow[n\infty]{} x$

donc c'est fini !

$x_n \in D(x_N, \varepsilon)$ $\forall n \geq N$

Une suite de C. est bornée, donc contenue dans une (gde) boule fermée

Or les boules fermées sont cpcts, donc cette suite admet une val. d'adh.

② $A \subseteq X$ A cpcte $\Leftrightarrow$ A fermée + bornée $\Rightarrow$ ok (bjo)

$\Leftarrow$?

Soit $A \subseteq X$. On suppose A fermée bornée.

Il suffit de mq A est séqt cpcte (X métrique)

Soit (x_n) une suite de pts de A...

la suite est bornée (car A l'est)

donc elle contenue dans une grande boule fermée :

$\exists a \in A, \exists R \geq 0 ; \forall n \in \mathbb{N}, x_n \in D(a,R)$

Or $D(a,R)$ est compact, donc il existe $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ str ↑, $x \in D(a,R)$ tq $x_{\phi(n)} \xrightarrow[n\to\infty]{} x$

Or A est fermé, donc $x \in A$

Donc A est (séquentiellement) compacte.

$\cancel{*}$

autre idée ? A fermée bornée $A \subseteq \underbrace{D(a,R)}_{\text{fermé dans } X}$ $(\exists a \in X, \exists R > 0$ tq...$)$

!

fermé ds X ?

?

donc A est fermée dans $D(a,R)$

de plus $D(a,R)$ est cpct (hyp)

dc A est cpcte (partie fermée d'un cpct)

en effet : $A = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{un fermé de } X}}{A \cap D(a,R)}$

donc ceci est un fermé de $D(a,R)$ (topo induite...)

ou

fermée ?

$A \subseteq D(a,R)$

soit (x_n) pts de A qui cv ds $D(a,R)$

cette suite cv donc dans... X

or A est... fermé ds X

donc la limite de (x_n)

appartient à A

exercice 7 $X = \{a,b,c\}$ + d discrète

$$\begin{cases} \delta(a,b) = \delta(b,a) = \delta(a,c) = \delta(c,a) = 2 \\ \delta(b,c) = \delta(c,b) = 1 \\ \delta(a,a) = \delta(b,b) = \delta(c,c) = 0 \end{cases}$$

$\leftarrow$ ses suites de Cauchy sont les suites stationnaires

① mq δ distance fortement équiv. à d

ok

$d \leq \delta \leq 2d$

$d(b,c) \leq \delta(b,c) \leq 2\,d(b,c)$ ok

$\underbrace{d(a,b)}_{1} \leq \underbrace{\delta(a,b)}_{2} \leq \underbrace{2\,d(a,b)}_{2}$ ok

② $X \xrightarrow{f} X$

$a \longmapsto b$

$b \longmapsto c$

$c \longmapsto c$

contractante pour δ ?

contractante pour d ?

$x = a, x' = b$

$d(f(a), f(b)) = \underbrace{d(b,c)}_{1} = \underbrace{d(a,b)}_{1}$

donc $\nexists k \in [0,1[$ tel que

$d(f(x), f(y)) \leq k\, d(x,y)$

$\forall x,y \in X$

$x, x' \in X$ $\quad \underbrace{\delta(f(x), f(x'))}_{1} \leq \frac{1}{4} \underbrace{\delta(x, x')}_{2}$ $\quad 1 \leq c\, 2$

1 si $x \neq x'$
et $x \neq b$, $x' \neq c$
ou $x \neq c$, $x' \neq b$

$\frac{1}{2}$ ok? 2

$$\underbrace{\delta(\underbrace{f(a)}_{b}, \underbrace{f(b)}_{c})}_{1} \leq ? \ \underbrace{\delta(a, b)}_{2}$$

↑ $\frac{1}{2}$

$(X, d) \xrightarrow{f} (X, d)$ $\quad f(c) = c$ (!)

$(X, \delta) \xrightarrow{f} (X, \delta)$ contracθ

(X, δ) complet? ←

(X, d) complet?? ← oui, déjà vu

exercice 8

$$(*) \begin{cases} x = \frac{1}{4} \sin(x+y) \\ y = 1 + \frac{2}{3} \operatorname{Arctan}(x-y) \end{cases}$$

mq ∃! soluθ

c'est un pb fixe

de $\mathbb{R}^2 \xrightarrow{f} \mathbb{R}^2$

$(x, y) \longmapsto \left(\frac{1}{4} \sin(x+y), 1 + \frac{2}{3} \operatorname{Arctan}(x-y)\right)$

mq f a un unique pt fixe

Mq f est contractante (!)

trouver un k tel que f soit k-lipschitzienne
$0 \leq k < 1$

avant ça (pour que ça ait un sens...)
il faut avoir une distance sur $\mathbb{R}^2$ qui rende $\mathbb{R}^2$ complet

$(\mathbb{R}^2, d_\infty)$ est complet
d_2 aussi? ok
d_1 aussi? ok

On cherche $d = \begin{cases} d_\infty ? \\ d_1 ? \\ d_2 ? \end{cases}$ tq f soit k-lip avec $k < 1$ ...

$$d(f(X,Y), f(x,y)) \leq k\, d((X,Y), (x,y))$$

$$f(X,Y) - f(x,y) = ? = \left(\underbrace{\frac{1}{4} \sin(X+Y) - \frac{1}{4} \sin(x+y)}_{A}, \underbrace{\frac{2}{3} \operatorname{Arctan}(X-Y) - \frac{2}{3} \operatorname{Arctan}(x-y)}_{B}\right)$$

arriver à majorer A et B (!)

$$|A| = \frac{1}{4} |\sin(X+Y) - \sin(x+y)|$$
$$\leq \frac{1}{4} |(X+Y) - (x+y)| \quad ?$$
$$= \frac{1}{4} |(X-x) + (Y-y)| \leq \frac{1}{4} d_1((X,Y), (x,y))$$

$$\underbrace{|\sin(b) - \sin(a)| \leq |b-a|}_{\text{iAF}} \quad \forall a, b ?$$

↑ $|\sin'(\theta)| \leq 1$

$$|B| = \frac{2}{3}\left|\operatorname{Arctan}(X \underset{+}{-} Y) - \operatorname{Arctan}(x \underset{+}{-} y)\right|$$

$\operatorname{Arctan}'(x) = \dots = \frac{1}{1+x^2} \leq 1$

$$\leq \frac{2}{3}\left|(X \overset{+}{-} Y) - (x \overset{+}{-} y)\right| \leq \frac{2}{3} d_1((X,Y),(x,y))$$

je dis : $\frac{1}{4} < \frac{2}{3} < 1$ donc $|A|, |B| \leq \frac{2}{3} d_1((X,Y),(x,y))$

donc $d_\infty(f(X,Y), f(x,y)) \leq \frac{2}{3} d_1((X,Y),(x,y))$

↖ $\max(|A|, |B|)$

donc f est contractante

NON
car il n'y a pas
de m̂ dist. au départ
et à l'arrivée

mieux ? $d_1(f(X,Y), f(x,y)) = |A| + |B| \leq \frac{1}{4} d_1((X,Y),(x,y)) + \frac{2}{3} d_1((X,Y),(x,y))$

$$= \underbrace{\left(\frac{1}{4} + \frac{2}{3}\right)}_{= \frac{11}{12} < 1} d_1((X,Y),(x,y))$$

(!)

donc f est contractante
pour d_1

---

topo induite

$(X, \mathcal{O})$ espace top $\quad (X, d)$

$A \subseteq B \subseteq X$

A fermé de X
~~B fermé de X~~ $\overset{?}{\Longrightarrow}$ A fermé de B

$X = \mathbb{R}$?

$A \subseteq B \subseteq \mathbb{R}$

$B =]0,1]$ pas un fermé de $\mathbb{R}$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ A \\ \text{fermé de } \mathbb{R}}}{[\tfrac{1}{2}, 1]} \subset \underbrace{]0,1]}_{B} \subset \mathbb{R}$$

(!) $A \subseteq B \subseteq X$

A fermé de B
B fermé de X $\overset{?}{\Longrightarrow}$ $\boxed{\text{A fermé de X}}$

$\boxed{\text{si } a_n \longrightarrow x \in X}$ ...

alors comme $A \subseteq B$, (a_n) est une suite de pts de B qui cv ds X

$x \in B$ car B fermé ds X ? ok

et donc... (a_n) est une suite de pts de A qui cv ds B

or A fermé ds B ... donc $\boxed{x \in A}$