On s'intéresse à des éq. de la forme

$$(*)\ \begin{cases} y'(t) = f(y(t)) \\ y(0) = y_0 > 0 \end{cases}$$

← (!) f ne dépend que de y et pas de t (équations autonomes)

$$y'(t) = \underbrace{2y(t) + t}_{f(t,y(t))}$$

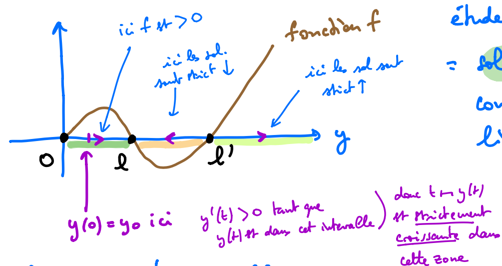
$$f(t,y) = t + 2y$$

↑ non-autonome !

(!) en général (sauf exception) on ne sait pas résoudre $(*)$ explicitement

thm de Cauchy-Lipschitz : si f est C^1 (= dérivable + dérivée continue) alors le pb de Cauchy $(*)$ admet une unique solution

exemple : $y'(t) = f(y(t))$ $(*)$



étude qualitative des solutions = sol. ↑, ↓ ? variat° d'une sol ? comportement des sol qd $t \to +\infty$? lim ? $\to +\infty$? $\to 0$? $\to \ell \in \mathbb{R}$?

(!) équilibre de l'équa diff = les solutions ℓ de $f(\ell) = 0$

pourquoi s'y intéresser ?

- si $f(\ell) = 0$, alors $\underbrace{y(t) = \ell}_{\text{sol cte (!)}}$ est solution de l'équa diff $\quad y'(t) = 0 = f(\underbrace{y(t)}_{\ell})$ ok
- si $y(t) = $ cte est sol de l'éq. diff, alors $\underset{y'(t)}{0} = f(\underset{y(t)}{\text{cte}})$ donc cte = un équilibre de l'éq. diff

les équilibres sont des "frontières" pour les autres solutions !
c-à-d si $y(t)$ est une solution telle que $y(t_0) = \ell$ (un équilibre) pour un certain $t_0 \in \mathbb{R}$, alors en fait $y(t) = \ell\ \forall t$

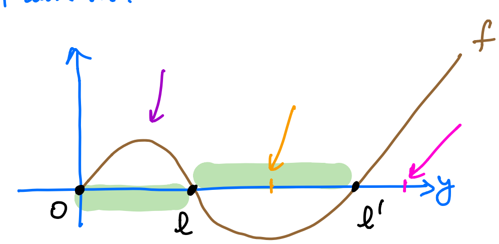
(!) conséquence du thm de Cauchy-Lipschitz : unicité de la sol. au pb de Cauchy.

$$\begin{cases} y'(t) = f(y(t)) \\ y(t_0) = \ell \end{cases} \qquad \left.\begin{aligned} &y_1(t) = \ell \quad \forall t \\ &y_2(t) \text{ autre sol ?} \end{aligned}\right\} \text{ ça doit être la même solution...}$$

↑ équilibre

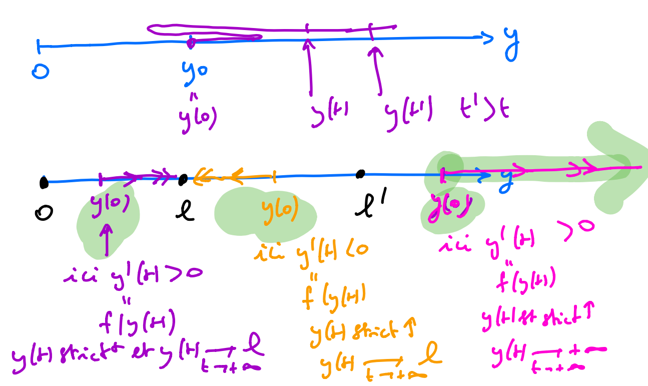
$$\begin{cases} y'(t) = f(y(t)) \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

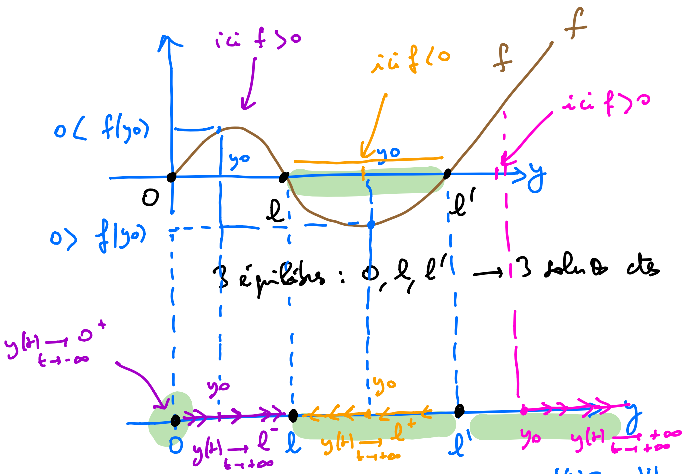
le signe de f (en $y(t)$) nous dit si y est croissante ou décroissante en temps t



3 équilibres : $0, \ell, \ell'$ → 3 sol° ctes

que dire des solutions qui ne sont pas ctes ?
si $t \mapsto y(t)$ est une sol. non cte, alors "elle ne traverse aucun équilibre"
c-à-d $f(y(t)) \neq 0\ \forall t$



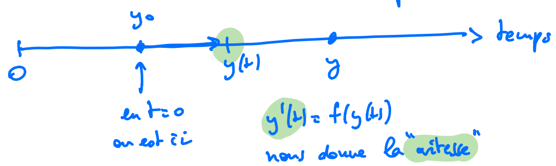


$$\begin{cases} y'(t) = f(y(t)) \\ y(0) = y_0 > 0 \end{cases}$$

f fonction donnée
$f(y)$

une solution : c'est $t \longmapsto y(t)$

t : le temps ; $y(t)$: un nbre qui dépend du temps



$y'(t) = f(y(t))$ nous donne la "vitesse" de $y(t)$

(!) cette vitesse $y'(t)$ dépend uniquement de votre "position" $y(t)$ à ce moment-là

① si $y(0) = 0$ alors $y(t) = 0$ $\forall t \geq 0$
si $y(0) = \ell$ alors $y(t) = \ell$ $\forall t \geq 0$
si $y(0) = \ell'$ alors $y(t) = \ell'$ $\forall t \geq 0$

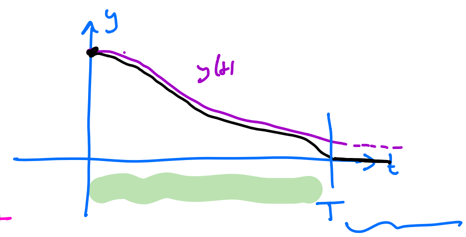
$y'(t) \equiv 0$ $\forall t$ dans chacun de ces trois cas (!) $f(0) = f(\ell) = f(\ell') = 0$

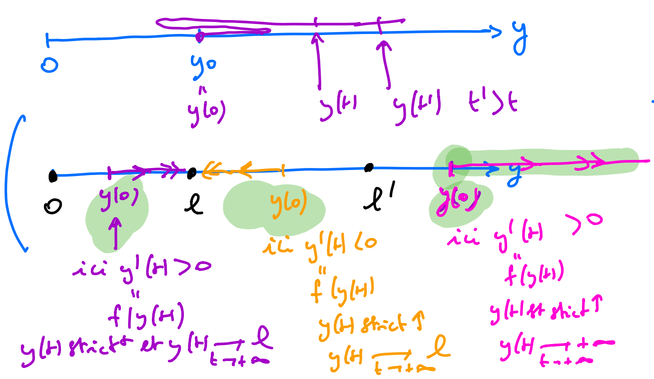
② si $y(0) = y_0 \in \,]0, \ell[$
alors $y'(0) = f(y_0) > 0$

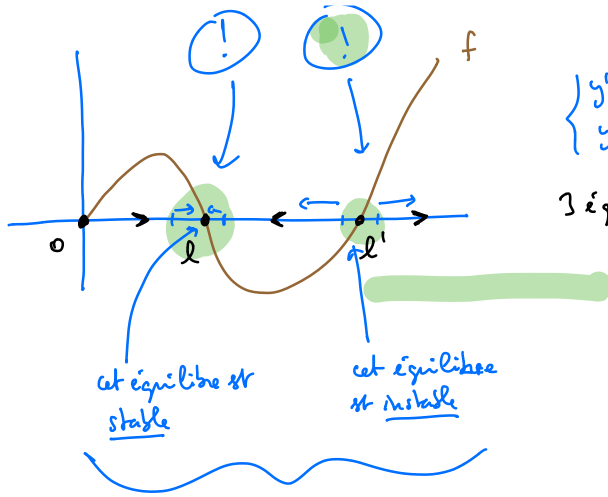
③ si $y(0) > \ell$

ex : $\begin{cases} y'(t) = -1 < 0 \\ y(0) = 10 \end{cases}$

$y(t) = -t + 10$ ↓

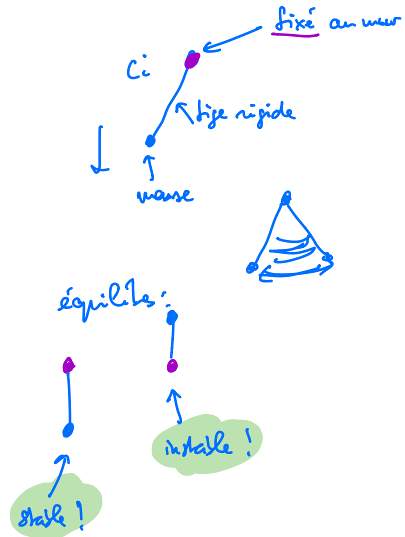






$$\begin{cases} y'(t) = f(y(t)) \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

3 équilibres



Quelques exemples

$f(y(t))$

équa diff linéaire d'ordre 1 homogène !

① croissance linéaire

$$\begin{cases} y'(t) = r\,y(t) \\ y(0) = y_0 > 0 \end{cases}$$

ici r = une cte donnée

(!) cas discret $p_{n+1} = p_n + r\,p_n$

solutions ? $y(t) = \underbrace{Ce^{rt}}_{\text{sol gale}}$

⊕ ci : $y(0) = Ce^0 = C$, $y(0) = y_0$

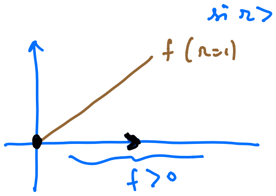
$y'(t) = f(y(t))$

ici $f(y) = ry$

une seule solut° : $y(t) = y_0 e^{rt}$

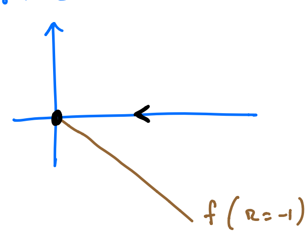
cette sol. est-elle ↑ ? ↓ ? cte ?

si $r > 0$ — si $r < 0$ — si $r = 0$

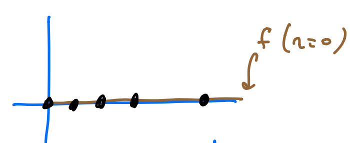


$r > 0$ (p.ex $r = 1$)

$y(t) = y_0 e^{rt}$ ↑



$y(t) = y_0 e^{rt}$ ↓



sol. toutes ctes

en fonction de la ci $y(0) = y_0$

② croissance logistique :

$$\boxed{y'(t) = r\,y(t)\left(1 - \frac{y(t)}{K}\right)} \longrightarrow \ = f\big(y(t)\big)$$

$$\boxed{\begin{cases} y'(t) = f(y(t)) \\ y(0) = y_0 \end{cases}}$$

cte liée à la population (r)

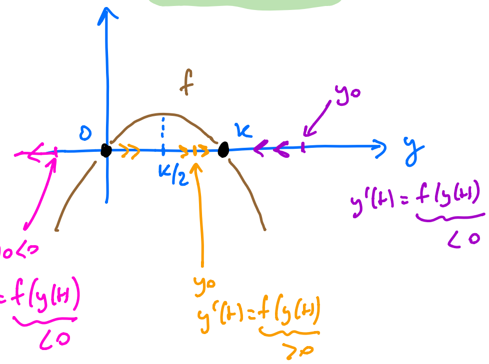
cte liée au milieu (K)

$\underbrace{\qquad}$ croissance de la pop. en l'absence de contraintes du milieu

$\underbrace{\qquad}$ si $y(t) > K$ alors ce terme est < 0 et cela rend $y'(t) < 0$

$$f(y) = r y \left(1 - \frac{y}{K}\right) = -\frac{r}{K} y^2 + r y$$

$r > 0$ et $K > 0$



2 équilibres : $\ell = 0$ et $\ell = K$

$$\begin{cases} 0 \text{ instable} \\ K \text{ stable} \end{cases} \qquad \begin{cases} f(0) = 0 \\ f(K) = 0 \end{cases}$$

résolution de l'équa diff logistiq

$$\begin{cases} y'(t) = r\,y(t)\left(1 - \dfrac{y(t)}{K}\right) \\ y(0) = y_0 > 0 \end{cases}$$

① on peut se ramener au cas où $K = 1$

changement de fonction inconnue $Y(t) := \dfrac{y(t)}{K}$

quelle est l'équa diff vérifiée par $Y(t)$?

$y(t) = K\,Y(t)$

donc $y'(t) = K\,Y'(t)$

$$y'(t) = r y(t)\left(1 - \frac{y(t)}{K}\right) \iff K\,Y'(t) = r\,K\,Y(t)\big(1 - Y(t)\big)$$

$$\iff \boxed{Y'(t) = r\,Y(t)\big(1 - Y(t)\big)} \longleftarrow \text{équation logistique pour } Y(t) \text{ où } \underline{\underline{K = 1}}$$

② faire le changement de fonction inconnue

$\longrightarrow Z(t) = \dfrac{1}{Y(t)}$ (!)

$\longrightarrow$ quelle est l'équa diff vérifiée par $Z(t)$? la résoudre, en déduire $Z(t) = \dots$

puis $Y(t) = \dots$

puis $y(t) = \dots$

$$Y(t) = \frac{1}{Z(t)}$$

donc
$$Y'(t) = \frac{-Z'(t)}{Z(t)^2}$$

donc $Y'(t) = r\,Y(t)\,(1 - Y(t))$

$$\Updownarrow$$

$$-\frac{Z'(t)}{Z(t)^2} = r\,\frac{1}{Z(t)}\left(1 - \frac{1}{Z(t)}\right)$$

$$\Updownarrow$$

$$-Z'(t) = r\,Z(t)\left(1 - \frac{1}{Z(t)}\right) = r\,Z(t) - r$$

donc $\boxed{Z'(t) = -r\,Z(t) + r}$ éq. diff vérifiée par $Z = \frac{1}{Y}$

éq. liné. d'ordre 1 (non homogène) $Z' = -rZ$

ses solutions sont : $Z(t) = \underbrace{\underset{\uparrow \text{cte}}{C}\, e^{-rt}}_{\text{sol. de l'éq hom.}} + \underbrace{1}_{\text{sol part.}}$

on "repart en arrière" : on connaît $Z(t)$, on en déduit $Y(t)$ puis $y(t)$ ...

$$Y(t) = \frac{1}{Z(t)} = \frac{1}{1 + C\,e^{-rt}} = \frac{1}{(e^{rt} + C)\,e^{-rt}} = \frac{e^{rt}}{e^{rt} + C}$$

(!) $\frac{1}{e^{-rt}} = e^{rt}$

puis finalement :

$Y = \frac{y}{K}$

$$y(t) = K\,Y(t) = \frac{K\,e^{rt}}{e^{rt} + \underset{\uparrow \text{une cte à déterminer}}{C}}$$

$$p(t) = \frac{p_0\,e^{rt}}{1 - p_0 + p_0\,e^{rt}}$$

$y(t) = p(t)$

$y_0 = p_0$

$K = 1$

$$y(t) = \frac{K\,e^{rt}}{e^{rt} + C}$$

$y(0) = y_0$

$$\frac{K\,e^0}{e^0 + C} = y_0$$

$$\frac{K}{1 + C} = y_0$$

$K = y_0(1 + C) = y_0 + y_0\,C$

$y_0\,C = K - y_0$

$C = \frac{K - y_0}{y_0} = \frac{K}{y_0} - 1$

$$y(t) = \frac{K\,e^{rt}}{e^{rt} + \frac{K}{y_0} - 1} = \frac{K\,e^{rt}}{\frac{1}{y_0}\left(y_0\,e^{rt} + K - y_0\right)}$$

$$= \frac{y_0\,K\,e^{rt}}{y_0\,e^{rt} + K - y_0} = \frac{y_0\,e^{rt}}{\frac{y_0}{K}\,e^{rt} + 1 - \frac{y_0}{K}}$$

Que se passe-t-il qd $t \to +\infty$?

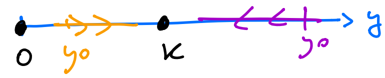
$r, K > 0$ ctes données par le modèle

$e^{rt} \xrightarrow[t \to +\infty]{} ?\ +\infty$

si $y_0 \neq 0$

$$y(t) = \underbrace{\frac{y_0\,e^{rt}}{\frac{y_0}{K}\,e^{rt} + 1 - \frac{y_0}{K}}}_{\text{Fi}} = \frac{\cancel{e^{rt}}\;y_0}{\cancel{e^{rt}}\left(\frac{y_0}{K} + \underbrace{\underset{\downarrow t \to +\infty \; 0}{e^{-rt}}\left(1 - \frac{y_0}{K}\right)}_{\downarrow}\right)} \xrightarrow[t \to +\infty]{} \frac{y_0}{\frac{y_0}{K}} = K \quad !$$

$\underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{??}$ $\qquad$ $\underbrace{\qquad 0 \qquad}_{\frac{y_0}{K}}$



si $y_0 = 0$ ... alors $y(t) = 0$

si $y_0 = K$ ... alors $y(t) = \dfrac{1}{\frac{1}{K}} = K$

si $0 < y_0 < K$ ... alors $y(t) \uparrow$

si $y_0 > K$ ... alors $y(t) \downarrow$

③ modèle bistable (effet Allee)

nouvelle cte

$$y'(t) = r\,y(t)\left(1 - \frac{y(t)}{K}\right)\underbrace{\left(y(t) - \theta\right)}_{\substack{<0 \text{ si } y(t) < \theta \\ >0 \text{ si } y(t) > \theta}}$$

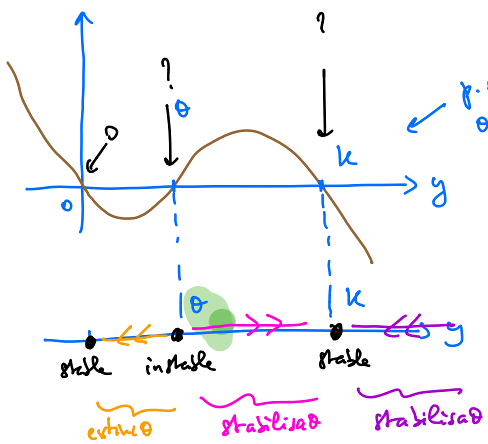
$$f(y) = ry\left(1 - \frac{y}{K}\right)(y - \theta)$$

$f(\ell) = 0$ équilibres

$$\begin{cases} \ell = 0 \\ \ell = K \\ \ell = \theta \end{cases}$$

$\theta < K$?

$K < \theta$?



p. ex $\theta < K$