(!) exemple de sev pas fermé dans un evn de dimension infinie :

$\quad$ F (sev) $\quad$ E (evn) $\quad$ forcément ! (infinie)

$E=\ell^\infty$ avec $\|\cdot\|_\infty$ $\quad$ $x=(x_1,x_2,\dots,x_n,\dots)$ bornées

$\|x\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}^*} |x_n|$

F sev des suites nulles APCR $\quad$ F pas fermé $\quad$ $\bar F = c$ suites $\xrightarrow[n\to\infty]{} 0$) exo TD 2 ?

Cas où E est un evn de dimension finie n

(!) toute base $(e_1,\dots,e_n)$ de E donne un isomorphisme $\mathbb{R}^n \xrightarrow{\Phi} E$

$$(x_1,\dots,x_n) \longmapsto x_1\vec e_1 + x_2\vec e_2 + \dots + x_n \vec e_n$$

par conséquent : toute norme N_E sur E peut être "tirée en arrière" par Φ pour donner une norme N sur $\mathbb{R}^n$:

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}^n \arrow[r, "\Phi"] \arrow[dr, dashed, "N"'] & E \arrow[d, "N_E \text{ donnée}"] \\ & \mathbb{R} \end{tikzcd}$$

$N = N_E \circ \Phi$

et alors Φ devient une isométrie linéaire (AL bijective qui préserve les normes) entre $(\mathbb{R}^n, N)$ et (E, N_E)

$N_E(\Phi(x)) = N(x)$ par déf !

(N_E : norme sur E ; $\Phi(x) \in E$; N : norme sur $\mathbb{R}^n$)

Théorème Sur un espace vectoriel de dim finie,

(!) toutes les normes sont équivalentes.

(!) on ne dit pas que toutes les distances sont (fortement) équivalentes ! — dist. discrète $\neq$ en gal dist qq

dém : (!) on sait que c'est vrai sur $\mathbb{R}^n$ (cf. chap. compacité)

donc c'est vrai sur un ev E de dim n : $\quad$ deux normes sur E $\quad$ $(e_1,\dots,e_n)$ base de E, $\Phi : \mathbb{R}^n \to E$ isomorph

deux normes sur $\mathbb{R}^n$

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}^n \arrow[r, "\Phi"] \arrow[dr, dashed, shift right, "N"'] \arrow[dr, dashed, shift left, "N'"] & E \arrow[d, shift left, "N_E"] \arrow[d, shift right, "N'_E"'] \\ & \mathbb{R} \end{tikzcd}$$

$N = N_E \circ \Phi$

$N' = N'_E \circ \Phi$

N et N' sont équivalents ! d'où $\alpha, \beta > 0$ telles que :

$$\begin{cases} \alpha N(x_1,\dots,x_n) \leq N'(x_1,\dots,x_n) \leq \beta N(x_1,\dots,x_n) \\ \forall (x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{R}^n \end{cases}$$

d'où, qq soit $\vec u \in E$:

$$\alpha N_E(u) \leq N'_E(u) \leq \beta N_E(u) \longrightarrow \text{ce qu'on voulait montrer}$$

$$\alpha N(\underbrace{\Phi^{-1}(u)}_{x_0 \in \mathbb{R}^n}) \leq N'(\Phi^{-1}(u)) \leq \beta N(\Phi^{-1}(u))$$

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}^n \arrow[r, "\Phi"] \arrow[dr, "N'"'] & E \ni \vec u \arrow[d, "N'_E"] \\ & \mathbb{R} \end{tikzcd}$$

$\boxed{\vec u \in E}$

$N' \circ \Phi^{-1} = N'_E(u)$

(!) Sur un ev de dim finie :

* tts les normes sont équiv.
* tts les distances issues de normes sont fortement équivalents
* bcp de distances ne proviennent pas d'une norme (elles peuvent être 2 à 2 équiv. ou pas, fort^t équiv ou pas)

Corollaire (!) Soit (E,N) un evn de dimension finie

Alors : (i) (E,N) est complet

(ii) les parties compacts de (E,N) sont exactement les parties fermées et bornées (par N)

(iii) toute suite bornée (par N) de pts de E admet une sous-suite convergente

dém : on sait que c'est vrai pour $\mathbb{R}^n$ avec la norme $\|\cdot\|_\infty$ — compacité (ii) et (iii) — complétude (i)

(!) ces propriétés (i)-(ii)-(iii) sont invariants
| par chang^t de normes équivalents
| par isométrie

① $\|\cdot\|$ norme qq sur $\mathbb{R}^n$ elle est équiv. à $\|\cdot\|_\infty$ $\exists \alpha, \beta > 0$ tq $\alpha \|\cdot\|_\infty \leq \|\cdot\| \leq \beta \|\cdot\|_\infty$

toute suite de Cauchy pour $\|\cdot\|$ est aussi de C. pour $\|\cdot\|_\infty$
toute suite cv pour $\|\cdot\|$ —— cv pour $\|\cdot\|_\infty$
} donc $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$ est complet

toute partie bornée pour $\|\cdot\|$ —— bornée pour $\|\cdot\|_\infty$
—— fermée pour $\|\cdot\|$ —— fermée pour $\|\cdot\|_\infty$
—— compacte pour $\|\cdot\|$ —— cpcte pour $\|\cdot\|_\infty$
} donc les cpcts de $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$ sont les fermés bornés

② E ev de dim n + norme N_E

$\mathbb{R}^n \xrightarrow{\Phi} E$
N ↑ isométrie N_E

$\mathbb{R}^n \xrightarrow{\Phi} E$
$\cup$ $\cup$
$A \underset{\Phi^{-1}}{\overset{\Phi}{\leftrightarrows}} B$

$B = \Phi(A)$
$A = \Phi^{-1}(B)$

A est bornée dans $\mathbb{R}^n$ par N $\iff$ B est bornée de E par N_E

$(x_k) \underset{\Phi^{-1}}{\overset{\Phi}{\leftrightarrows}} (u_k)$
suite de $\mathbb{R}^n$ — suite de E

Corollaire E evn (de dim qq) (N) soit F un sev de dimension finie

| Alors F est fermé dans E

dém Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suite de pts de F qui cv dans E $\quad x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x \in E$ (cv au sens de la norme; $x_n \in F$)

(x_n) est cv (de E) donc elle est de Cauchy

Donc c'est une suite de Cauchy de pts de F (pour la norme restreinte à F)

Or $(F, N_{|F})$ est un evn de dim finie, donc il est complet
Donc (x_n) converge ds F, donc $x \in F$ (unicité de la limite)

[donc $x \in F$

Donc F est (séquentiellt) fermé.

ex (?) $E = \ell^\infty$, $\|\cdot\|_\infty$ — F suites nulles APCR **pas fermé**

$(x_1, x_2, \dots, x_n, 0, 0, 0, \dots)$

Thm de Riesz Si E est un evn $\|\cdot\|$ de **dim. infinie**

alors la boule unité fermée $D(0_E, 1) = \{x \in E \,;\, \|x\| \leq 1\}$ — $d(x, 0_E) = \|x - 0_E\|$

n'est **pas compacte**

(!) pourtant elle est fermée + bornée ...

dém voir notes de cours — déjà vu exemple ℓ^∞, 1

Applications linéaires continues

$(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ deux evn

$E \xrightarrow{u} F$ — on s'intéresse aux appl. linéaires continues

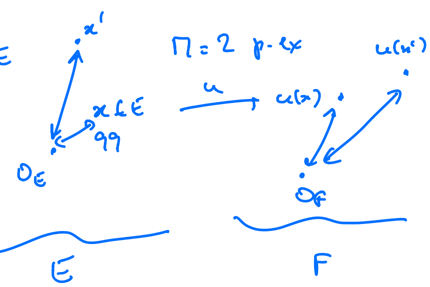
Prop Soit $E \xrightarrow{u} F$ linéaire. Alors il y a équivalence entre :

(i) u est continue (en tt pt de E)

(ii) u est continue en 0_E

(iii) il existe $M \geq 0$ tel que $\|u(x)\|_F \leq M \|x\|_E \quad \forall x \in E$

dépend de u seult !



dém (i) ⇒ (ii) ⇒ (iii) ⇒ (i)

(i) ⇒ (ii) ok

(ii) ⇒ (iii) $u(0_E) = 0_F$ — u linéaire !

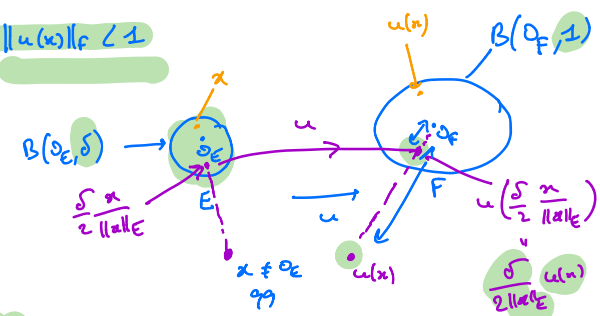
$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 ; \forall x \in E, \underbrace{d(x, 0_E)}_{\|x\|_E} < \delta \Rightarrow \underbrace{d(u(x), \overset{u(0_E)}{0_F})}_{\|u(x)\|_F} < \varepsilon$

p.ex $\varepsilon = 1$

↳ soit $\delta > 0$ tq $\forall x \in E$, $\|x\|_E < \delta \Rightarrow \|u(x)\|_F < 1$

Soit $x \in E$ qq non nul :

alors $\left\| \frac{\delta}{2} \frac{x}{\|x\|_E} \right\|_E = \frac{\delta}{2\|x\|_E} \|x\|_E = \frac{\delta}{2}$



donc $\left\| u\left(\frac{\delta}{2} \frac{x}{\|x\|_E} \right) \right\|_F < 1$ (!)

$= \left\| \frac{\delta}{2\|x\|_E} u(x) \right\|_F = \frac{\delta}{2\|x\|_E} \|u(x)\|_F < 1$

d'où $\underbrace{\|u(x)\|_F}< \frac{2}{\delta}\underbrace{\|x\|_E}$ si $x \neq 0_E$

donc $\|u(x)\|_F \leq \frac{2}{\delta}\|x\|_E \quad \forall x \in E$ $\qquad M = \frac{2}{\delta}$

(iii) ⇒ (i) si $\exists M \geq 0$ tq $\forall x \in E$, $\|u(x)\|_F \leq M \|x\|_E$

alors u est M-lipschitzienne :

$$d_F(u(x), u(y)) = \|u(x) - u(y)\|_F = \|u(x-y)\|_F \leq M \|x-y\|_E = M\, d_E(x,y)$$

donc u est continue sur E.

(!) les AL continues sont lipschitziennes, donc uniformément continues

Exemple ① $E = \mathbb{R}[X]$ dim ∞

$+ \|\cdot\|_\infty$ $\quad \|P\|_\infty = \max(|a_0|, |a_1|, \dots, |a_n|)$ norme sur $\mathbb{R}[X]$

$P = a_0 + a_1 X + \dots + a_n X^n$

dérivation $\Delta : \mathbb{R}[X] \longrightarrow \mathbb{R}[X]$

$P \longmapsto \Delta(P) = P' = a_1 + 2a_2 X + 3a_3 X^2 + \dots + n a_n X^{n-1}$

$P = a_0 + a_1 X + \dots + a_n X^n$, $a_2 X^2$

linéaire

$(P+Q)' = P' + Q'$

$(\lambda P)' = \lambda P'$

$$(\mathbb{R}[X], \|\cdot\|_\infty) \xrightarrow{\Delta} (\mathbb{R}[X], \|\cdot\|_\infty)$$
$$P \longmapsto P'$$

continue ?

existe-t-il une cte $M \geq 0$

telle que $\|P'\|_\infty \leq M \|P\|_\infty \quad \forall P \in \mathbb{R}[X]$?

NON : X^n $(n \geq 1)$ $\quad \|X^n\|_\infty = 1$ $\qquad X^n = 0 + 0X + 0X^2 + \dots + 0X^{n-1} + 1X^n$

$\downarrow \Delta$

$(X^n)' = nX^{n-1}$ $\quad \|nX^{n-1}\|_\infty = n$

donc $\nexists M \geq 0$ tq $\|P'\|_\infty \leq M \|P\|_\infty \quad \forall P \in \mathbb{R}[X]$

donc la dérivation n'est pas continue... pour ce choix de norme (!)