30% CC + 10% DM + 60% exam final

avec règle du max sur la note d'exam final

evn, <u>applications linéaires continues</u>

$(E, \|\cdot\|_E)$ $(F, \|\cdot\|_F)$ deux evn $\qquad E \xrightarrow{u} F$ linéaire

on a vu : u continue (en tt pt de E) $\iff$ u continue en 0_E $\iff$ $\exists M \geq 0 ;\ \|u(x)\|_F \leq M \|x\|_E$

u est M-lipschitzienne

$$d_F(u(x), u(y)) = \|u(x) - u(y)\|_F = \|u(x-y)\|_F \leq M \|x-y\|_E = M\, d_E(x,y)$$

<u>exemple</u> $E = C^0([0,1], \mathbb{R})$ $\qquad E \xrightarrow{u} E$, $f \longmapsto \underbrace{u(f)}$

norme $\|\cdot\|_\infty$ au départ et à l'arrivée

$u(f) : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto u(f)(x) := \underbrace{\int_0^x t f(t)\,dt}_{\text{continue en } x}$

u est continue ?

(!) u est linéaire : $\begin{cases} u(f+g)(x) = \int_0^x t(f(t)+g(t))\,dt \\ \forall x \in [0,1] \quad = \int_0^x t f(t)\,dt + \int_0^x t g(t)\,dt = u(f)(x) + u(g)(x) \\ u(\lambda f)(x) = \dots = \lambda u(f)(x) \end{cases}$

$\exists ?\ M \geq 0$ tq $\|u(f)\|_\infty \leq M \|f\|_\infty$ $(\forall f)$

$$|u(f)(x)| = \left|\int_0^x t f(t)\,dt\right| \leq \int_0^x \underbrace{|t f(t)|}_{\leq t\|f\|_\infty} dt \leq \int_0^x t \|f\|_\infty\,dt = \|f\|_\infty \underbrace{\int_0^x t\,dt}_{[t^2/2]_0^x}$$

$x \in [0,1]$

$$= \|f\|_\infty \left(\frac{x^2}{2} - 0\right) \leq \frac{1}{2}\|f\|_\infty \quad (x \in [0,1])$$

donc $\|u(f)\|_\infty \leq \frac{1}{2}\|f\|_\infty$

donc u (linéaire) est <u>continue</u>.

$$|u(f)(x)| \leq \|f\|_\infty \frac{x^2}{2} \overset{?}{\leq} M\|f\|_\infty$$

$$\hookrightarrow \underbrace{\sup_{x \in [0,1]} |u(f)(x)|}_{\|u(f)\|_\infty} \leq M \|f\|_\infty$$

<u>thm</u> Si E est un evn <u>de dimension finie</u>, alors toutes les AL $E \xrightarrow{u} F$ sont continues (!)

dim finie $\quad$ qq

<u>dém</u> $E \xrightarrow{u} F$ lin. $\quad \dim(E) = n < \infty$

$(e_1, \dots, e_n)$ base de E $\qquad \mathbb{R}^n \xrightarrow{\text{iso}} E$

$x \in E$ s'écrit : $x = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$

(!) $N(x) := \|(x_1, \dots, x_n)\|_\infty = \max(|x_1|, \dots, |x_n|)$ est une <u>norme</u> sur E

Comme E est de dim finie, toutes les normes sur E sont équivalentes

Pour mq u est continue, on peut raisonner avec la norme N

$$\|u(x)\|_F = \|u(x_1e_1+\cdots+x_ne_n)\|_F$$
$\forall x \in E$
$$= \|x_1u(e_1)+\cdots+x_nu(e_n)\|_F$$
$$\leq |x_1|\,\|u(e_1)\|_F+\cdots+|x_n|\,\|u(e_n)\|_F$$
$$\leq \underbrace{\left(\|u(e_1)\|_F+\cdots+\|u(e_n)\|_F\right)}\max\left(|x_1|,\ldots,|x_n|\right)$$
$$= M\ N(x)$$

donc u est continue.

Espace vectoriel normé $\mathcal{L}_c(E,F)$

$(E,\|\cdot\|_E)$ $(F,\|\cdot\|_F)$ evn

$\mathcal{L}(E,F)$ = l'ev des appl. lin. de E dans F $\quad u+v \quad \lambda u$

$\underbrace{\mathcal{L}_c}(E,F)$ = ———————— continues de E ds F

↑ c'est un sev de $\mathcal{L}(E,F)$ $\quad u,v$ C^0 $\Rightarrow$ $u+v$ C^0, λu C^0

→ norme sur $\mathcal{L}_c(E,F)$ associée à $\|\cdot\|_E$ et $\|\cdot\|_F$

soit $u\in\mathcal{L}_c(E,F)$ $\quad \exists M\geq 0\ ;\ \forall x\in E,\ \underbrace{\|u(x)\|_F\leq M\|x\|_E}$

pour $x=0_E$
c'est une égalité, pas très intéressante
$u(0_E)=0_F \qquad \|0_F\|_F=0=M\underbrace{\|0_E\|_E}_{=0}$

pour $x\neq 0_E$:
$$\frac{\|u(x)\|_F}{\|x\|_E}\leq M$$

donc : si u (linéaire) est continue,
alors $\exists M\geq 0$
tq $\underbrace{\forall x\neq 0_E,\ \dfrac{\|u(x)\|_F}{\|x\|_E}\leq M}$

donc $\displaystyle\sup_{x\neq 0_E}\frac{\|u(x)\|_F}{\|x\|_E}$ est fini

$$(E,\|\cdot\|_E)\xrightarrow{u}(F,\|\cdot\|_F)$$
$\|u\| = |||u|||$

Déf : On pose $\displaystyle |||u||| = \sup_{x\neq 0_E}\frac{\|u(x)\|_F}{\|x\|_E}\geq 0$

Prop et Déf : $|||\cdot|||$ est une norme sur $\mathcal{L}_c(E,F)$, appelée norme subordonnée à $\|\cdot\|_E$ et $\|\cdot\|_F$

dém $\quad |||u|||\geq 0$ clair

$|||u|||=0 \iff \left(\dfrac{\|u(x)\|_F}{\|x\|_E}=0_{\mathbb{R}}\ \ \forall x\neq 0_E\right) \iff \left(\|u(x)\|_F=0\ \ \forall x\neq 0_E\right)$
$\iff u(x)=0_F\ \ \forall x\neq 0_E$
$\iff u(x)=0_F\ \ \forall x\in E$
$\iff u=0_{\mathcal{L}_c(E,F)}$

$$\underset{\in\mathbb{R}}{|||\lambda u|||} = \sup_{x\neq 0_E} \frac{\|(\lambda u)(x)\|_F}{\|x\|_E} = \sup_{x\neq 0_E} \frac{\|\lambda\, u(x)\|_F}{\|x\|_E} = \sup_{x\neq 0_E} \frac{|\lambda|\,\|u(x)\|_F}{\|x\|_E} = |\lambda| \sup_{x\neq 0_E} = |\lambda|\,|||u|||$$

$$|||u+v||| = \sup_{x\neq 0_E} \frac{\|(u+v)(x)\|_F}{\|x\|_E} = \sup_{x\neq 0_E} \frac{\|u(x)+v(x)\|_F}{\|x\|_E} \leq \sup_{x\neq 0_E} \frac{\|u(x)\|_F+\|v(x)\|_F}{\|x\|_E}$$

$$\leq \sup_{x\neq 0_E} \frac{\|u(x)\|_F}{\|x\|_E} + \sup_{x\neq 0_E} \frac{\|v(x)\|_F}{\|x\|_E}$$

$$= |||u||| + |||v|||$$

<u>exemple</u>

① $\underset{\|.\|_\infty}{\mathbb{R}^3} \xrightarrow{f} \underset{\|.\|_\infty}{\mathbb{R}^2}$ $f(x,y,z) = (x+2y+z\,,\,-3x+2y+2z)$ AL

matrice de les bases can : $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

f est continue pour ces choix de normes ?

oui : l'espace de départ est de dim finie

$|||f|||$? pour ces choix de normes ?

$$|||f||| = \sup_{(x,y,z)\neq(0,0,0)} \frac{\|f(x,y,z)\|_\infty}{\|(x,y,z)\|_\infty}$$

7 marche

$$\underbrace{\|f(x,y,z)\|_\infty}_{\max(|x+2y+z|,\,|-3x+2y+2z|)} \leq \ ? \ \ldots \leq M\,\|(x,y,z)\|_\infty$$

la meilleure cte possible

$|x+2y+z| \leq \underbrace{|x|}_{1} + \underbrace{2|y|}_{+\,2} + \underbrace{|z|}_{+\,1} \leq 4\max(\text{——})$

$|-3x+2y+2z| \leq \underbrace{3|x|}_{3} + \underbrace{2|y|}_{+\,2} + \underbrace{2|z|}_{+\,2} \leq 7\max(\text{—})$

$$\begin{cases} |x+2y+z| \leq 4\max(|x|,|y|,|z|) \\ |-3x+2y+2z| \leq 7\max(|x|,|y|,|z|) \end{cases}$$

donc $\|f(x,y,z)\|_\infty \leq 7\max(|x|,|y|,|z|) = 7\,\|(x,y,z)\|_\infty$

cl : $\forall (x,y,z)\in\mathbb{R}^3,\ \|f(x,y,z)\|_\infty \leq 7\,\|(x,y,z)\|_\infty$ ←

$\forall (x,y,z)\neq(0,0,0),\ \dfrac{\|f(x,y,z)\|_\infty}{\|(x,y,z)\|_\infty} \leq 7$

donc $\sup\limits_{(x,y,z)\neq(0,0,0)} \left(\dfrac{\|f(x,y,z)\|_\infty}{\|(x,y,z)\|_\infty}\right) \leq 7$ donc $|||f||| \leq 7$ ⚠

⚠ si on trouve un $(x,y,z)\neq(0,0,0)$ tq $\|f(x,y,z)\|_\infty = 7\,\|(x,y,z)\|_\infty$] ⚠

alors on saura que le sup est égal à 7

$(x,y,z) = (-1,1,1)$ $f(-1,1,1) = (-1+2+1,\ 3+2+2) = (2,7)$

$\|f(-1,1,1)\|_\infty = 7$ $\|(-1,1,1)\|_\infty = 1$

donc $\|f(-1,1,1)\|_\infty = 7 \, \|(-1,1,1)\|_\infty$

et donc $|||f||| = 7$

② $E = F = C^0([0,1],\mathbb{R})$ $\qquad E \xrightarrow{u} F$ $\qquad u(f) : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$

$\|.\|_\infty$ sur E et F $\qquad f \longmapsto u(f)$ $\qquad x \longmapsto \int_0^x t f(t)\,dt$

on a vu que $\|u(f)\|_\infty \leq \frac{1}{2}\|f\|_\infty$

donc u est continue et $|||u||| \leq \frac{1}{2}$

$\forall x \in [0,1]$ $\quad |u(f)(x)| = \left|\int_0^x t f(t)\,dt\right| \underset{\substack{\uparrow \\ = \text{ si } f \geq 0}}{\leq} \int_0^x |t f(t)|\,dt \underset{\substack{\uparrow \\ = \\ \text{si } f = \text{cte !}}}{\leq} \|f\|_\infty \int_0^x t\,dt \leq \|f\|_\infty \underbrace{\int_0^1 t\,dt}_{\frac{1}{2}}$

donc

$\underbrace{\max_{x \in [0,1]} |u(f)(x)|}_{\|u(f)\|_\infty} \leq \frac{1}{2}\|f\|_\infty$

si $f \equiv 1$ p.ex :

$\|f\|_\infty = 1$

$u(f)(x) = \int_0^x t\,dt = \frac{x^2}{2}$ $\qquad \|u(f)\|_\infty = \frac{1}{2}\|f\|_\infty$

$\|u(f)\|_\infty = \frac{1}{2}$ $\qquad$ donc $|||u||| = \frac{1}{2}$ $\quad$!

②' $\underset{\substack{\nearrow \\ \text{norme} \\ \|.\|_1}}{E} = \underset{\substack{\uparrow \\ \|.\|_\infty}}{F} = \underbrace{C^0([0,1],\mathbb{R})}_{\text{dim } \infty}$ $\quad$ $\hat{\text{m}}$ u

$\underset{\forall x \in [0,1]}{|u(f)(x)|} = \left|\int_0^x t f(t)\,dt\right| \leq \int_0^x \underset{\substack{\uparrow \\ 0 \leq t \leq x \leq 1}}{t}|f(t)|\,dt \leq 1 \int_0^x |f(t)|\,dt \leq \underbrace{\int_0^1 |f(t)|\,dt}_{\|f\|_1}$

?

$\Longrightarrow \|u(f)\|_\infty \leq \|f\|_1$

donc u est continue et $\underbrace{|||u|||}_{\substack{\uparrow \\ \text{norme de } u \\ \text{subordonnée à } \|.\|_1 \text{ au départ} \\ \text{et } \|.\|_\infty \text{ à l'arrivée}}} \leq 1$

notes de cours : $\nexists f \neq 0$ tq $\|u(f)\|_\infty = \|f\|_1$

mais : il existe une suite de fonctions f_n qui s'approche de l'égalité

$f_n(t) = n t^{n-1}$

$\|f_n\|_1 =? = \int_0^1 n t^{n-1}\,dt = \left[t^n\right]_0^1 = 1$ $\quad$ qq soit n

$\|u(f_n)\|_\infty =? = \sup_{x \in [0,1]} |u(f_n)(x)| = \sup_{x \in [0,1]} \left|\int_0^x n t^n \,dt\right| = \sup_{x \in [0,1]} \left[\frac{n}{n+1} t^{n+1}\right]_0^x$

$= \sup_{x \in [0,1]} \frac{n}{n+1} x^{n+1} = \frac{n}{n+1}$

$\frac{\|u(f_n)\|_\infty}{\|f_n\|_1} = \frac{\frac{n}{n+1}}{1} = \frac{n}{n+1} \xrightarrow[n\infty]{} 1$!

$$\sup_{f \neq 0} \frac{\| u(f) \|_\infty}{\| f \|_1} = 1$$