Année 2019-2020
L3 — Mathématiques
HLMA502 Topologie

Feuille d'exercices 5

Exercice 1. Montrer que, dans un espace vectoriel normé :

1. les boules (ouvertes ou fermées) sont convexes [1] ;
2. l'adhérence d'une boule ouverte est la boule fermée de même centre et même rayon, et l'intérieur d'une boule fermée est la boule ouverte de même centre et même rayon (on suppose les rayons non nuls).

Exercice 2. Soit E un espace vectoriel normé. Si A, B sont deux parties de E, on pose $A+B := \{a+b \mid a \in A, b \in B\}$.

1. Montrer que si A est ouverte, alors $A+B$ est ouverte.
2. Montrer que si A et B sont compactes, alors $A+B$ est compacte.
3. Montrer que si A est compacte et B est fermée, alors $A+B$ est fermée.
4. Trouver un exemple, dans $\mathbb{R}^2$ usuel, avec A et B fermées mais $A+B$ non fermée.

Exercice 3. Soit E l'espace vectoriel des fonctions $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ de classe C^1 telles que $f(0) = 0$. Pour $f \in E$, on pose $N_1(f) := \sup_{x\in[0,1]} |f(x)| + \sup_{x\in[0,1]} |f'(x)|$ et $N_2(f) := \sup_{x\in[0,1]} |f(x) + f'(x)|$. Montrer que N_1 et N_2 sont deux normes équivalentes sur E.

Exercice 4. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ comme une application linéaire $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$. Déterminer sa norme $|||A|||$ lorsque :

1. On prend la norme $\|\cdot\|_\infty$ au départ et à l'arrivée.
2. On prend la norme $\|\cdot\|_1$ au départ et la norme $\|\cdot\|_\infty$ à l'arrivée.

Exercice 5. On considère une matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$ comme un endomorphisme $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$.

1. On munit $\mathbb{R}^n$ de la norme $\|\cdot\|_\infty$. Montrer qu'alors $|||A||| = \sup_{1\le i\le n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}|$.
2. On munit $\mathbb{R}^n$ de la norme $\|\cdot\|_1$. Montrer qu'alors $|||A||| = \sup_{1\le j\le n} \sum_{i=1}^n |a_{ij}|$.

1. Dans un espace vectoriel E, une partie A est dite **convexe** si quels que soient $x, y \in A$ et $t \in [0,1]$, le point $(1-t)x + ty$ appartient à A.

Exercice 6. Soit $E = \mathbb{R}[X]$. Pour $P = a_0 + a_1 X + \cdots + a_n X_n \in E$, on pose $\|P\|_\infty := \max(|a_0|, \dots, |a_n|)$, $\|P\|_1 := |a_0| + \cdots + |a_n|$ et $\|P\|_2 := \sqrt{a_0^2 + \cdots + a_n^2}$. La forme linéaire $\varphi : E \to \mathbb{R}$ définie par $\varphi(P) = P(1)$ est-elle continue pour ces normes ?

Exercice 7. Soient E un espace vectoriel normé, et $\phi : E \to \mathbb{R}$ une forme linéaire. On note $H = \ker \phi$.

1. Montrer que si ϕ est continue, alors H est fermé dans E.
2. On suppose que ϕ n'est pas continue.
   a) Montrer qu'il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de points de E tels que $\|x_n\| = 1$ et $|u(x_n)| \geq n$ pour tout n.
   b) Soit $x \in E$ quelconque. Que fait le point $x - u(x)\dfrac{x_n}{u(x_n)}$ quand $n \to +\infty$? Quelle est l'image par u de ce point ?
   c) Que venez-vous de démontrer au sujet de H ?

Exercice 8. Le **dual topologique** E' d'un espace vectoriel normé $(E, \|\cdot\|_E)$ est l'espace vectoriel des formes linéaires continues sur E, autrement dit $E' := \mathscr{L}_c(E, \mathbb{R})$. Il est muni de la norme subordonnée (en voyant $\mathbb{R}$, muni de la valeur absolue, comme un espace vectoriel normé). Le but de cet exercice est de montrer que $(\ell^1)' \cong \ell^\infty$ en tant qu'espaces vectoriels normés.

1. Pour $n \in \mathbb{N}$, on considère la suite $e_n := (0, \cdots, 0, 1, 0, \dots)$ où le « 1 » est placé à la n^{e} place. Montrer que $e_n \in \ell^1$ et déterminer $\|e_n\|_1$.
2. On cherche à définir une application linéaire $(\ell^1)' \to \ell^\infty$. Pour cela :
   a) Soit $\phi : \ell^1 \to \mathbb{R}$ une forme linéaire continue. On pose $\alpha_n := \phi(e_n)$. Montrer que la suite $\alpha := (\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée et que $\|\alpha\|_\infty \leq |||\phi|||$.
   b) Montrer que l'application qui à ϕ associe α est une application linéaire de $(\ell^1)'$ dans ℓ^∞
3. On cherche à construire une application linéaire en sens inverse $\ell^\infty \to (\ell^1)'$. Pour cela :
   a) Soit $\alpha := (\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un élément de ℓ^∞. Montrer que si $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ appartient à ℓ^1, alors $\sum_{n\in\mathbb{N}} \alpha_n x_n$ est une série absolument convergente, et que de plus $|\sum_{n\in\mathbb{N}} \alpha_n x_n| \leq \|\alpha\|_\infty \|x\|_1$.
   b) En déduire que si $\alpha \in \ell^\infty$, la construction de la question précédente donne une forme linéaire continue $\phi : \ell^1 \to \mathbb{R}$, avec $|||\phi||| \leq \|\alpha\|_\infty$.
   c) Montrer qu'on vient de définir une application linéaire $\ell^\infty \to (\ell^1)'$.
4. Montrer que les applications $(\ell^1)' \to \ell^\infty$ (définie dans la question 2) et $\ell^\infty \to (\ell^1)'$ (définie dans la question 3) sont linéaires, réciproques l'une de l'autre, et préservent les normes. Ce sont donc des isométries, et on a démontré que les espaces vectoriels normés $(\ell^1)'$ et ℓ^∞ sont isométriques.

Exercices supplémentaires

Exercice 9. Soient N et N' deux normes sur un espace vectoriel E. Montrer que N et N' sont équivalentes si et seulement si toute suite qui converge au sens de l'une est convergente au sens de l'autre.

Exercice 10. Soit E un espace vectoriel normé. Montrer que si F est un sous-espace vectoriel de E différent de E, alors F est d'intérieur vide.

Exercice 11. Soit $n \geq 2$ un entier. Montrer qu'il n'existe pas de norme sur $M_n(\mathbb{R})$ qui soit invariante par conjugaison, c'est-à-dire telle que $\|P^{-1}AP\| = \|A\|$ quelles que soient les matrices $A \in M_n(\mathbb{R})$ et $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 12. Soit $E = \{f \in C^1([0,1],\mathbb{R}) \mid f(0) = 0\}$. Pour $f \in E$, on pose $N(f) := \|3f + f'\|_\infty$. Montrer que N est une norme sur E, et qu'il existe une constante $\alpha > 0$ telle que $\|f\|_\infty \leq N(f)$. Les normes N et $\|\cdot\|_\infty$ sont-elles équivalentes ?

Exercice 13. On se place dans l'espace vectoriel normé $E = C^0([0,1],\mathbb{R})$ avec $\|\cdot\|_1$. Soit $g \in E$ fixée. On définit alors une forme linéaire $\Phi_g : E \to \mathbb{R}$ par $\Phi_g(f) := \int_0^1 f(t)g(t)dt$. Montrer que Φ_g est continue et trouver sa norme $\|\Phi_g\|$.

Exercice 14. On se place dans l'espace vectoriel $\mathscr{B}(\mathbb{N},\mathbb{R})$ des suites réelles bornées, muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$. Calculer la distance :

1. de la suite constante égale à 1 au sous-espace vectoriel des suites qui convergent vers 0 ;
2. de la suite $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ au sous-espace vectoriel des suites convergentes.

Exercice 15. On se place dans l'espace vectoriel $\mathscr{B}([-1,1],\mathbb{R})$ muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$. Soit $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = 1$ si $-1 \leq x < 0$, $f(0) = 0$, et $f(x) = -1$ si $0 < x \leq 1$. Déterminer la distance de f au sous-espace vectoriel des fonctions continues.

Exercice 16. On considère $E = C^0([0,1],\mathbb{R})$ avec la norme $\|\cdot\|_\infty$. On considère une forme linéaire $\phi : E \to \mathbb{R}$ telle que $f \geq 0 \implies \phi(f) \geq 0$. Montrer que ϕ est continue.

Exercice 17. Soit E un espace vectoriel normé, et soient F, G deux sous-espaces vectoriels de E. On suppose que F est fermé et que G est de dimension finie. Le but de l'exercice est de montrer qu'alors $F + G$ est également fermé.

1. Expliquer pourquoi il suffit de démontrer le résultat lorsque $\dim(G) = 1$.
2. On suppose désormais que $G = \mathrm{Vect}(e)$, avec $e \in E \setminus F$. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de points de $F + G$ qui converge vers un point $a \in E$.

a) Expliquer pourquoi on peut écrire de manière unique $x_n = y_n + \alpha_n e$ avec $x_n \in F$ et $\alpha_n \in \mathbb{R}$.

b) Montrer que si la suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas bornée, alors e appartient à l'adhérence de F et obtenir une contradiction.

c) Montrer que si la suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée, alors a appartient à l'adhérence de $F+G$.

Exercice 18. On considère l'espace vectoriel E des suites réelles $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que $\sum |u_n|$ converge, muni de la norme $\|u\| := \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|$.

1. Montrer que $(E, \|\cdot\|)$ est complet.
2. On dit que $u \prec v$ si $u_n \le v_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   a) Vérifier que $\prec$ est une relation d'ordre sur E.
   b) Montrer que toute suite croissante majorée de E est convergente.
   c) Montrer que les segments $[u, v] := \{x \in E \mid u \prec x \prec v\}$ sont compacts.

Exercice 19. Le but de l'exercice est de démontrer que $(c_0)' \cong \ell^1$, où c_0 est l'espace vectoriel des suites réelles convergeant vers 0, muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$.

1. Soit $\phi \in (c_0)'$. On pose $\alpha_n := \phi(e_n)$, où e_n est la suite $e_n = (0,\ldots,0,1,0,0\ldots)$ avec un 1 au n-ème rang. On veut montrer que $\alpha = (\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ appartient à ℓ^1. Pour cela :
   a) Pour chaque $n \in \mathbb{N}$, on pose $\varepsilon_n := 1$ si $\alpha_n \ge 0$ et $\varepsilon_n = -1$ si $\alpha_n < 0$. Puis on définit $y_n := (\varepsilon_0, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n, 0, 0, \ldots)$. Montrer que $0 \le |\phi(y_n)| \le \|\phi\|$.
   b) En déduire que $|\alpha_0| + \cdots + |\alpha_n| \le \|\phi\|$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   c) En déduire que $\alpha \in \ell^1$, et que $\|\alpha\|_1 \le \|\phi\|$.
2. Soit $\alpha = (\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ appartenant à ℓ^1. Pour chaque $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, montrer que la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} \alpha_n x_n$ est absolument convergente. En déduire que l'application $\phi : c_0 \to \mathbb{R}$ définie par $\phi(x) := \sum_{n\in\mathbb{N}} \alpha_n x_n$ est bien définie, linéaire, continue, et que $\|\phi\| \le \|\alpha\|_1$.
3. Conclure.

Exercice 20. Soient E un espace vectoriel normé, et $\phi : E \to \mathbb{R}$ une forme linéaire continue non nulle. On choisit un $a \notin \ker(\phi)$. Le but de l'exercice est de montrer que :

$$\|\phi\| = \frac{|\phi(a)|}{d(a, \ker\phi)}$$

1. Pour commencer : pourquoi peut-on diviser par $d(a, \ker\phi)$?
2. Observer que $|\phi(a-x)| \le \|\phi\|\|a-x\|$ pour tout $x \in \ker\phi$. En déduire que $|\phi(a)| \le \|\phi\| d(a, \ker\phi)$.
3. Si $x \in E$ vérifie $\|x\| = 1$, montrer que $|\phi(x)| d(a, \ker\phi) \le |\phi(a)|$, en observant que $\phi(x)a - \phi(a)x$ appartient à $\ker\phi$. Conclure.