



Licence 2 - 2020/2021

HLMA304 : Arithmétique

Thierry Mignon

Octobre 2020

Contrôle continu

Durée : 1h30 – Documents, calculatrices et téléphones interdits

Exercice 1. *Cours.* Soit (a, b) un couple d'entiers ; énoncer et démontrer le résultat d'existence et d'unicité de la division euclidienne de a par b .

Exercice 2. Prouver que, pour tout entier relatif m , la fraction

$$\frac{21m + 4}{14m + 3}$$

est irréductible.

Exercice 3. Soit $P = (x, y)$ un point du plan \mathbb{R}^2 . On dira que P est *entier* si l'abscisse x et l'ordonnée y de P sont tous deux dans \mathbb{Z} .

(1) Trouver l'ensemble des points entiers de la droite :

$$345x + 714y - 6 = 0$$

(2) Soit D une droite d'équation :

$$ax + by + c = 0, \quad \text{où } (a, b, c) \in \mathbb{Z}^3.$$

Montrer que D contient soit aucun, soit une infinité de points entiers. Donner des exemples de chacune des deux situations.

Exercice 4. Trouver tous les couples $(a, b) \in \mathbb{N}^2$ tels que $a \wedge b = 30$ et $a \vee b = 600$.

Exercice 5. On rappelle que la valuation 2-adique d'un nombre entier n est le plus grand entier naturel k tel que 2^k divise n . Dit autrement, c'est l'exposant du nombre premier 2 dans la décomposition en facteurs premiers de n . On la note $v_2(n)$.

(1) Calculer les valuations 2-adiques de $5 + 1$, $5^2 + 1$. Calculer ensuite celles de $5 - 1$, $5^2 - 1$.

(2) Montrer que, quelque soit k dans \mathbb{N}^* , $5^k + 1$ n'est pas divisible par 4. En déduire $v_2(5^k + 1)$ pour $k \in \mathbb{N}^*$.

(3) Calculer, par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$, la valuation 2-adique de $5^{(2^n)} - 1$.