(E) $y'(t) = a(t)y(t) + b(t)$ — équa diff linéaire

inconnue : fonction $y = y(t)$

$a(t)$ = une fonction donnée

t = le "temps"
- la variable de dérivation
$y'(t) = \frac{dy}{dt}$

p.ex. $y' - 2ty = -(2t-1)e^t$

$\Leftrightarrow y'(t) = \underbrace{2t}_{a(t)}\, y(t) - (2t-1)e^t$

(H) équation homogène associée

$y'(t) = a(t)\,y(t)$

(!) $\underbrace{\text{les solutions de (E)}}_{\text{une coté de solutions}}$ sont de la forme : " $\underbrace{\text{sol. part. de (E)}}_{\text{n'importe quelle sol. de (E) (1 sol)}}$ + $\underbrace{\text{sol. g}^{\text{ale}}\text{ de (H)}}_{\text{une famille de sol. (coté de sol.)}}$ "

pourquoi ?

(!) si $y_p(t)$ est une "sol. part." de (E)

alors pour toute autre sol $y(t)$ de (E) :

$$\begin{cases} y_p'(t) = a(t)\,y_p(t) + b(t) \\ y'(t) = a(t)\,y(t) + b(t) \end{cases} \Rightarrow y'(t) - y_p'(t) = a(t)y(t) - a(t)y_p(t) + \cancel{b(t)} - \cancel{b(t)}$$

$\Leftrightarrow (y - y_p)'(t) = a(t)\,(y - y_p)(t)$

$\Leftrightarrow$ la fonction $\underbrace{y - y_p}_{Y(t)}$ est sol. de l'éq. homogène (H) $\quad Y'(t) = a(t)\,Y(t)$

ccl : $y(t) - y_p(t) = \underbrace{y_h(t)}_{\text{sol. de l'éq. (H)}}$

$\Leftrightarrow y(t) = \underbrace{y_p(t)}_{\text{sol. part de (E)}} + \underbrace{y_h(t)}_{\text{sol. de (H)}}$

sol. de (H) : $y'(t) = a(t)\,y(t)$ ses sol : $y_h(t) = C e^{A(t)}$ où $A(t)$ = n'importe quelle primitive de $a(t)$ et C = une cte réelle

pourquoi ? ce sont bien des sol de (H) :

$$\frac{d}{dt}\left(Ce^{A(t)}\right) = C \frac{d}{dt} e^{A(t)} = C\,A'(t)\,e^{A(t)}$$
$$= C\,a(t)\,e^{A(t)}$$
$$= a(t)\; Ce^{A(t)}$$

donc $Ce^{A(t)}$ vérifie (H)

ce sont les seules solutions de (H) (il n'y en a pas d'autres)

si $y_h(t)$ est sol. de (H)

dc $y_h'(t) = a(t)\,y_h(t)$

on dérive $y_h(t)\,e^{-A(t)}$:

on veut mq : $\exists C \in \mathbb{R} ;\ y_h(t) = Ce^{A(t)}\ (\forall t)$

$\Updownarrow$

$y_h(t)\,e^{-A(t)} = C\ (\forall t)$

$$\frac{d}{dt}\left(y_h(t)\,e^{-A(t)}\right) = y'_h(t)\,e^{-A(t)} + y_h(t)\left(-a(t)\,e^{-A(t)}\right)$$

$$= a(t)\,y_h(t)\,e^{-A(t)} - a(t)\,y_h(t)\,e^{-A(t)} = 0 \quad (\forall t)$$

donc la fonction $y_h(t)\,e^{-A(t)}$ est constante

d'où : $\exists\, C$ cte réelle tq $y_h(t) = C\,e^{A(t)}$

<u>exemple</u> résoudre

① $\underbrace{y' + 2y = t^2}_{(E)}$ — un <u>polynôme</u> (de d°2)

$y' = -2y + t^2$

$$y(t) = \underbrace{C\,e^{-2t}}_{\text{sol. g}^{\text{ale}}\text{ de }(H)} + \underbrace{t^2/2}_{\text{une sol part. de }(E)}$$

primitive de -2

?

où $C \in \mathbb{R}$

!

on essaie : $\underbrace{\frac{d}{dt}\left(\frac{t^2}{2}\right)}_{t} + 2\left(+\frac{t^2}{2}\right) \overset{?}{=} t^2$

$t + t^2 \overset{?}{=} t^2$ non

$\exists$? sol cte $\left.\begin{matrix} y(t) = k \\ y'(t) = 0 \end{matrix}\right) \longrightarrow 2k = t^2 \longrightarrow k = \frac{t^2}{2}$ pas cte

$\underbrace{y'}_{0} + 2y = 1 \longrightarrow 2y = 1 \longrightarrow y = \frac{1}{2}$) ok c'est bien une cte !

pour trouver une sol. part

- chercher une sol. part. d'un certain type (en fonction de la forme de $a(t)$ et $b(t)$)
- méthode de la variaⁿ de la cte

$\downarrow$

ici : chercher une sol part. de (E) de la forme $y_p(t) = at^2 + bt + c$

a, b, c à déterminer

(E) $y' + 2y = t^2$

$$\underbrace{\frac{d}{dt}(at^2 + bt + c)}_{2at + b} + 2(at^2 + bt + c) \overset{?}{=} t^2$$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ 1}}{(\ldots)}\,t^2 + \underset{\substack{\shortparallel \\ 0}}{(\ldots)}\,t + \underset{\substack{\shortparallel \\ 0}}{(\ldots)} \overset{?}{=} t^2$$

$$\longrightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ b = -\frac{1}{2} \\ c = \frac{1}{4} \end{cases}$$

Ainsi : $y_p(t) = \frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{2}t + \frac{1}{4}$ est sol part. de (E)

<u>ccl</u> : la sol. g$^{\text{ale}}$ de (E) est $y(t) = C\,e^{-2t} + \frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{2}t + \frac{1}{4}$ (où $C \in \mathbb{R}$) — une infinité de solutions

⊕ ci $y(0) = 1$ $\leadsto$ $1 = C + \frac{1}{4}$ d'où $C = \frac{3}{4}$

↳ une <u>unique sol</u> :

$$y(t) = \frac{3}{4}e^{-2t} + \frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{2}t + \frac{1}{4}$$

$(E)\quad y' + 2y = t^2$ sol gale de (H) : $y_h(t) = Ce^{-2t}$ (où $C \in \mathbb{R}$)

méthode de la variaθ de la cte :

on cherche une fonction $C(t)$ de sorte que $y_p(t) = \underline{C(t)\, e^{-2t}}$ soit sol. de (E)

on remplace dans (E) :

$$\underbrace{\frac{d}{dt}\left(C(t)\, e^{-2t}\right)} + 2\, C(t)\, e^{-2t} \overset{?}{=} t^2$$

$$c'(t)\, e^{-2t} + C(t)\left(-2 \cancel{e^{-2t}}\right) + \cancel{2\, C(t)\, e^{-2t}} \overset{?}{=} t^2$$

$$\frac{1}{e^x} = e^{-x}$$

$$\iff C'(t)\, e^{-2t} = t^2$$

$$\iff \underbrace{C'(t) = \frac{t^2}{e^{-2t}} = t^2 e^{2t}}_{\text{on s'est ramené à chercher "la" primitive de } t^2e^{2t}}$$

$$\boxed{\int_a^b u(t)\, v'(t)\, dt = \Big[u(t)\, v(t)\Big]_a^b - \int_a^b u'(t)\, v(t)\, dt}$$

$$\int \underbrace{t^2}_{u}\, \underbrace{e^{2t}}_{v'}\, dt = \, ? = t^2\, \frac{e^{2t}}{2} - \int \cancel{2}t\, \frac{e^{2t}}{\cancel{2}}\, dt$$

$$= \frac{t^2}{2} e^{2t} - \int \underbrace{t}_{u}\, \underbrace{e^{2t}}_{v'}\, dt$$

$$= \frac{t^2}{2} e^{2t} - \left[\underbrace{t}_{u}\, \underbrace{\frac{e^{2t}}{2}}_{v} - \int \frac{e^{2t}}{2}\, dt\right] = \overbrace{\frac{t^2}{2} e^{2t} - \frac{t}{2} e^{2t} + \frac{e^{2t}}{4}}^{C(t)}$$

$(+\text{cte})$

$\longrightarrow$ une sol. part $y_p(t) = \left(\frac{t^2}{2} e^{2t} - \frac{t}{2} e^{2t} + \frac{e^{2t}}{4}\right) e^{-2t}$ (!)

$$= \frac{t^2}{2} - \frac{t}{2} + \frac{1}{4} \quad (!)$$

<u>exemple</u> résoudre $y'(t) + y(t) = 2 \sin t$ $\longleftarrow$

$(H) \longrightarrow y_h(t) = C\, e^{-t}$ $(C \in \mathbb{R})$

$\uparrow$

$y' \oplus y = 0$

sol part ? — $y_p(t) \overset{?}{=} \underbrace{e^{-2\cos t}}$ $\xrightarrow{d/dt}$ $2 \sin t\, e^{-2\cos t}$ NON...

$y_p(t) = a \cos t + b \sin t$ où a, b réels à déterminer (!)

$$\underbrace{\frac{d}{dt}(a \cos t + b \sin t) + (a \cos t + b \sin t)} \overset{?}{=} 2 \sin t$$

$\longrightarrow -a \sin t + b \cos t + a \cos t + b \sin t = 2 \sin t$

$$\iff \begin{cases} -a + b = 2 \\ a + b = 0 \end{cases}$$

$y_p(t) = \sin t - \cos t$ convient ? oui ccl : la sol gale de $y'+y = 2\sin t$

est, $y(t) = \sin t - \cos t + Ce^{-t}$ où $C \in \mathbb{R}$

exos

① $y' - y = (t+1)e^t$

② $y' - y = t - e^t + \cos t$

③ $(t^2+1)y' + 2ty + 1 = 0$

④ $y' + y = \dfrac{1}{1+e^t}$

⑤ $y' - 2ty = -(2t-1)e^t$

① $y' - y = (t+1)e^t$ $\quad y = y(t) \quad y' = y'(t)$

c'est une équa diff d'ordre 1 linéaire non-homogène

- (H) $y' - y = 0$ $\quad y_H(t) = Ce^t$ où $C \in \mathbb{R}$
- sol part. $\begin{cases} y_1' - y_1 = te^t \\ y_2' - y_2 = e^t \end{cases}$ (!) "superposition des solutions" pour une éq. linéaire

alors $y := y_1 + y_2$ vérifie $y'(t) = y_1'(t) + y_2'(t)$

$y'(t) - y(t) = (\quad) - (y_1(t) + y_2(t))$

$= \underbrace{y_1'(t) - y_1(t)}_{te^t} + \underbrace{y_2'(t) - y_2(t)}_{e^t}$

$y' - y = te^t$

sol : $y_1(t) = \dfrac{t^2}{2}e^t$

ok ?

te^t = polynôme × exp

$\left(P(t)e^{\alpha t}\right)' = P'(t)e^{\alpha t} + P(t)\alpha e^{t}$

$= \underbrace{\left(P'(t) + \alpha P(t)\right)}_{pol.}\underbrace{e^{\alpha t}}_{ou\ exp}$

$y_1' = te^t + \dfrac{t^2}{2}e^t$

$y_1' - y_1 = te^t + \cancel{\dfrac{t^2}{2}e^t} - \cancel{\dfrac{t^2}{2}e^t}$

$= te^t$ (!)

$y' - y = 1\ e^t$

sol : $y_2(t) = ?\ te^t$?

$(te^t)' - te^t$

$= e^t + \cancel{te^t} - \cancel{te^t} = e^t$ (!)

(!) $\underbrace{y'(t) - y(t) = \underbrace{(t+1)}_{poly.}\underbrace{e^t}_{exp}}_{\text{possible de faire direct}^t \text{ ici}}$

$y_p(t) = \underbrace{(at^2+bt+c)}_{a,b,c=?}e^t$

une sol part. de $y' - y = (t+1)e^t$

est donc $y_p(t) = \dfrac{t^2}{2}e^t + te^t = \left(\dfrac{t^2}{2} + t\right)e^t$

$y_H = Ce^t \quad C \in \mathbb{R}$

<u>variat° de la cte</u> $\quad y' - y = (t+1)e^t$

on cherche une sol part. de la forme $y(t) = C(t)e^t$ où $C(t)$ fonction à déterminer

on dérive et on remplace ds l'éq.

$y'(t) - y = (t+1)e^t \iff c'(t)e^t + c(t)e^t - c(t)e^t = (t+1)e^t$

$\iff c'(t)e^t = (t+1)e^t$

$\iff c'(t) = t+1$

$\Leftarrow C(t) = \frac{t^2}{2} + t \ (+cte)$

donc $y(t) = \left(\frac{t^2}{2}+t\right)e^t$ est une sol part. de $y' - y = (t+1)e^t$

③ $(t^2+1)y'(t) + 2t\, y(t) + 1 = 0 \quad \overset{?}{\rightsquigarrow} \quad y'(t) + a(t)\,y(t) = b(t)$

pb ?
ce terme (en t) s'annule qq part ?
non, nulle part

$y'(t) + \frac{2t}{t^2+1} y(t) + \frac{1}{t^2+1} = 0$

$$\iff \boxed{y'(t) + \frac{2t}{t^2+1} y(t) = \frac{-1}{t^2+1}}$$

exos

② $y' - y = t - e^t + \cos t$

③ $(t^2+1)y' + 2ty + 1 = 0$

④ $y' + y = \frac{1}{1+e^t}$

⑤ $y' - 2ty = -(2t-1)e^t$

③ $(t^2+1)y'(t) + 2t\,y(t) = -1 \iff y'(t) + \underbrace{\frac{2t}{t^2+1}}_{a(t)} y(t) = \underbrace{\frac{-1}{t^2+1}}_{b(t)}$

(H) $y' + \frac{2t}{t^2+1} y(t) = 0$

sol : $y_h(t) = C e^{-\ln(t^2+1)}$

$= C\left(\frac{1}{t^2+1}\right) = \frac{C}{t^2+1}$

$$\begin{cases} y'(t) + a(t)\,y(t) = 0 \\ y(t) = C e^{A(t)} \end{cases}$$

$A'(t) = a(t)$

$e^{-x} = \frac{1}{e^x}$

$\mathbb{R} \underset{\ln}{\overset{\exp}{\rightleftarrows}}]0, +\infty[$

sol part ?

MVC

↓ on cherche une sol part. de la forme $y(t) = \frac{C(t)}{1+t^2}$ où $C(t)$ est à déterminer

on dérive et on remplace :

$$\underbrace{(t^2+1)\left(\frac{C'(t)}{t^2+1} + C(t)\frac{-2t}{(t^2+1)^2}\right) + 2t\,\frac{C(t)}{1+t^2}}_{\overset{?}{=}\ C'(t)} = -1$$

$C'(t) = -1$

$C(t) = -t$ (+ cte)

une sol part. est $y_p(t) = \frac{-t}{t^2+1}$

ccl : sol gale $y(t) = \frac{-t}{t^2+1} + \frac{c}{t^2+1} = \frac{-t+c}{t^2+1}$ (où $c \in \mathbb{R}$)

$\boxed{\begin{array}{l} (*)\ \text{Ci}\quad y(0) = 2 \\ \rightarrow\ 2 = \frac{c}{1} \quad \boxed{c=2} \\ \exists!\ \text{sol} \\ y(t) = \frac{-t+2}{t^2+1} \end{array}}$

(5) $y'(t) - 2t\,y(t) = -(2t-1)\,e^t = -2te^t + e^t$

sol part (!) $y(t) = e^t$ ça marche !

$e^t - 2te^t \overset{(!)}{=} -2te^t + e^t$

éq. hom $y'(t) - 2ty(t) = 0$

$y_h(t) = C\,e^{t^2}$ avec $C \in \mathbb{R}$

MCV on cherche $y(t) = C(t)\,e^{t^2}$

$\rightarrow\ C'(t)e^{t^2} + 2tC(t)e^{t^2} - 2t\,C(t)e^{t^2} \overset{?}{=} -2te^t + e^t$

$\Leftrightarrow\ C'(t)\,e^{t^2} = -2t\,e^t + e^t = e^t(-2t+1)$

$\frac{e^t}{e^{t^2}} \overset{?}{=} \frac{1}{e^t}$

$\Leftrightarrow\ C'(t) = \frac{e^t(-2t+1)}{e^{t^2}} = \underbrace{(-2t+1)}_{u'(t)}\,\underbrace{e^{-t^2+t}}_{e^{u(t)}}$

$e^{-x} = \frac{1}{e^x}$ $\quad \frac{e^t}{e^{t^2}} = e^t e^{-t^2} = e^{-t^2+t}$

$e^a e^b \overset{?}{=} e^{a+b}$

$\Leftrightarrow\ C(t) = e^{-t^2+t}$ (+ cte)

$\rightarrow$ sol part. $y(t) = e^{-t^2+t}\,e^{t^2} = e^t$

(!) équa diff linéaire d'ordre 1 $\quad y'(t) + a(t)y(t) = b(t)$

(H) $\rightarrow$ sol $y_h(t) = C\,e^{-A(t)}$ où A primitive de a

MVC : on cherche une sol part. de la forme $y(t) = C(t)\,e^{-A(t)}$

ccl sol gale $y(t) = e^t + Ce^{t^2}$ où $C \in \mathbb{R}$

(2) $y' - y = t - e^t + \cos t$ (E)

(H) $y' - y = 0$ sol $y_h(t) = C\,e^t$ où $C \in \mathbb{R}$

sol part ? MVC : on cherche une sol part. de (E) de la forme $\underbrace{y(t) = C(t)\,e^t}_{uv}$

(où $C(t)$ à déterminer)

on dérive et on remplace :

$(uv)' =$

$\underbrace{y'(t) - y(t)}_{\Downarrow} = t - e^t + \cos t$

$c'(t)e^t + c(t)e^t - c(t)e^t = t - e^t + \cos t$

$\Leftrightarrow c'(t) = (t - e^t + \cos t)e^{-t} = \underbrace{te^{-t}}_{ipp} - 1 + \underbrace{\cos t\, e^{-t}}_{??}$

$\int t e^{-t}\, dt = $ ipp

<u>superposition des solutions</u>

$y' - y = t - e^t + \cos t$

- sol part de $y' - y = t$ (y_1)
- sol part. de $y' - y = -e^t$ (y_2)
- sol part. de $y' - y = \cos t$ (y_3)

$\rightarrow y_1 + y_2 + y_3$ sera sol. part de

$y' - y = t$ sol part $y_1(t) = at + b = \underbrace{-t - 1}$

$(-1) - (-t - 1) = -1 + t + 1 = t$ ok

$y' - y = -e^t$ sol part $y_2(t) = ?\, e^t$

$y' - y = \cos t$ sol part $y_3(t) = ?\cos t + ?\sin t$

⊕ exo $y'(t) - \frac{2}{t} y(t) = t^2 \quad (t > 0)$

$\begin{cases} y'(t) + \tan(t)\, y(t) = \sin(2t) \\ y(0) = 1 \end{cases}$ sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$

Equations différentielles à variables séparables / à variables séparées

équa diff (d'ordre 1) de la forme :

$$y'(t) = \underbrace{g(t)}_{\substack{\uparrow \\ \text{une fonction} \\ \text{de } t}} \underbrace{h(y(t))}_{\substack{\uparrow \\ \text{une fonction} \\ \text{de } y = y(t)}} = g(t)\, h(y(t))$$

ex : $y'(t) = y(t)^2 = \underset{\substack{\uparrow \\ g(t) = 1}}{1}\, y(t)^2 \quad h(y) = y^2$

$y'(t) = -\dfrac{t}{y(t)} = \underset{\substack{\uparrow \\ g(t) = -t}}{(-t)}\, \underset{\substack{\uparrow \\ h(y) = \frac{1}{y}}}{\dfrac{1}{y(t)}}$

ex : $y'(t) = \cos(t + y(t)) = ??$

$\cancel{=} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{en } t}}{(\quad)}\underset{\substack{\uparrow \\ \text{en } y(t)}}{(\quad)}$

$(t+1)\, y'(t) + t\, y(t)^2 = 0 \qquad t \geq 0$

$y'(t) = -\dfrac{t}{t+1}\, y(t)^2$

(!) de manière informelle (= qui plaît moyennement aux puristes)

$y'(t) = y(t)^2 \longleftrightarrow \dfrac{dy}{dt} = y(t)^2 \longleftrightarrow \dfrac{dy}{dt} = y^2 \longleftrightarrow \dfrac{dy}{y^2} = dt$

comme si t et y étaient deux "variables" ± indépendantes

$\longleftrightarrow \displaystyle\int \frac{dy}{y^2} = \int dt$

(!)

$\longleftrightarrow -\dfrac{1}{y} = t + cte$

(!) on trouve y en fonction de t

$\longleftrightarrow y(t) = \dfrac{-1}{t + C}$ où $C \in \mathbb{R}$

$y'(t) = (1+t^2)\, y(t)^3$

$y' = (1+t^2)\, y^3$

$y'(t) = \underline{(1+t^2)\, y} + \underline{(1+t^3)\, y^2}$

$\underset{??}{\cancel{=}} (\underbrace{\qquad}_{\text{que du } t})(\underbrace{\qquad}_{\text{que des } y})$

$\dfrac{a}{b} \times c =$

① exos $y'(t) - \frac{2}{t} y(t) = t^2$ $(t > 0)$

$\begin{cases} y'(t) + \tan(t)\, y(t) = \sin(2t) \\ y(0) = 1 \end{cases}$ sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$

$\frac{2 \times 3}{5 \times 3} = \frac{6}{15} = \frac{2}{5}$

$\frac{a}{b} \times c \neq \frac{a \times c}{b \times c} = \frac{a}{b}$

(E) $y'(t) - \frac{2}{t} y(t) = t^2$ à résoudre pour $t > 0$

$\frac{a}{b} \times c = \frac{ac}{b}$

éq. homogène (H) $y'(t) - \frac{2}{t} y(t) = 0$

$-\frac{1}{t} \times 2 \overset{?}{=} \frac{-2t}{t}$

$\frac{a}{b} \times c = \frac{a}{b} \times \frac{c}{1} =$

ses solutions ?

$-\frac{2}{t} = -\frac{1}{t} \times 2 = -2 \frac{1}{t}$

sont

$y_h(t) = C e^{2 \ln t} = C t^2$

où $C \in \mathbb{R}$

$e^{2 \ln t} = e^{\ln t^2} = t^2$

$e^{\ln t} = t$

$2 \ln t = \ln t^2$

sol part ? MVC

on cherche une sol de (E) de la forme $y(t) = C(t) t^2$

on dérive et on remplace dans (E) :

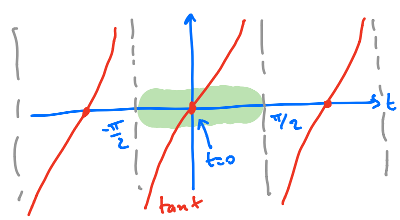
$\frac{t^2}{t} = t \ldots$

$\underbrace{C'(t) t^2 + C(t) 2t}_{y'(t)} - \frac{2}{t} C(t) t^2 = t^2$

$\Leftrightarrow C'(t) t^2 = t^2$ d'où $C(t) = t$ (+ cte)

$\Leftrightarrow C'(t) = 1$ d'où $y_p(t) = t^3$ vérif : $3t^2 - \frac{2}{t} t^3 = 3t^2 - 2t^2 = t^2$

ccl : sol. gale de (E) $y(t) = t^3 + Ct^2$ avec $C \in \mathbb{R}$

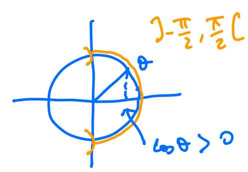


$\begin{cases} y'(t) + \tan(t)\, y(t) = \sin(2t) \quad (E) \\ y(0) = 1 \end{cases}$ sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$

(H) $y'(t) + \tan(t)\, y(t) = 0$

$y_h(t) = C \cos(t)$ où $C \in \mathbb{R}$

$e^{\ln(\cos t)} = \cos t$



$y'(t) + \tan(t)\, y(t) = 0$

$y'(t) + a(t)\, y(t) = 0$ $\rightarrow$ sol $y_h(t) = C e^{-A(t)}$ A primitive de a

primitive de $\tan(t)$? $\tan(t) = \frac{\sin(t)}{\cos(t)} = \frac{-u'(t)}{u(t)}$ où $u(t) = \cos t$

donc $\int \tan(t)\, dt = -\ln(\cos t) + $ cte

? on a bien le droit car $\cos t > 0$ sur $]-\pi/2, \pi/2[$

donc les sol. de (H) sont :

$y_h(t) = C\, e^{\ln(\cos t)} = C \cos t$

vérif ? $C=1$ $y(t) = \cos t \rightarrow -\sin t + \frac{\sin t}{\cos t} \cos t = -\sin t + \sin t = 0$

1 sol part : $y(t) = C(t) \cos t$

$C'(t) \cos t - C(t) \sin t + C(t) \sin t = \sin(2t)$

$C'(t) \cos t = \sin(2t)$ $\quad C'(t) = \frac{\sin(2t)}{\cos t} = \frac{2 \sin t \cos t}{\cos t} = 2 \sin t$

$\sin(a+b) = ? = \sin(a)\cos(b) + \sin(b)\cos(a)$ oui

$\sin(a-b) = \sin(a)\cos(b) - \sin(b)\cos(a)$

$\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$

$\sin(2t) = 2 \sin t \cos t$

d'où $C'(t) = 2 \sin t \rightarrow C(t) = -2\cos(t)$

ci $y(0) = 1$ donc $C(t) - 2\cos^2 t = 1$ $\quad \underline{C(t) = 1 + 2\cos^2 t}$?

finalement : $y(t) = \cos t + 2\cos^3 t$

WA : $y(t) = 3 \cos t - 2\cos^2 t$

??

$y(t) = ??$ $\quad C(t) \cos t - 2 \cos^2 t$

donc une sol part. de (E) est $y(t) = -2\cos^2(t)$

pour cette sol précise : $y(0) = -2$

① sol gale de (H) ← ∞té de sol

② sol part. de (E) ← 1 sol

③ sol gale de (E) ← ∞té de sol

④ ci → sélectionne 1 sol parmi

$t = 0 \rightarrow y(0) = 1$

sol gale de (E) :

$\boxed{y(t) = -2\cos^2 t + C \cos t}$

$t=0$

$y(0) = -2\cos^2(0) + C\cos(0)$

$\underbrace{\overset{1}{\overset{\shortparallel}{y(0)}} = -2 + C}_{C=3}$

ccl : le pb posé admet une unique solution :

$y(t) = -2\cos^2 t + 3\cos t$

équations à variables séparables

$y'(t) = -\frac{t}{y(t)} \iff \underbrace{y(t)\,y'(t)}_{\text{tous les } y(t) \text{ et } y'(t)} = \underbrace{-t}_{\text{tous les termes en } t}$

$y'(t) = \frac{dy}{dt}$

résolution "informelle"

$\frac{dy}{dt} = -\frac{t}{y}$

$y\,dy = -t\,dt$

$\int y\,dy = -\int t\,dt$

$\frac{y^2}{2} = -\frac{t^2}{2} + C$

y et t sont encore 2 variables (reliés)

exprimer $y = y(t)$ comme fonction de t

$\to y^2 = -t^2 + 2C$

$y(t) = \sqrt{-t^2+2C}$

quel est le domaine de déf de cette sol ?

ici C est une cte (!)

c'est $]-\infty, \sqrt{2C}[$??

(!) pour chaque réel $C \geq 0$, on a une solution $y_C(t) = \sqrt{-t^2+2C}$ ... définie sur $[-\sqrt{2C}, +\sqrt{2C}]$

qui est définie sur ?

$-t^2+2C \geq 0$

$\iff t^2 \leq 2C$

$\iff -\sqrt{2C} \leq t \leq \sqrt{2C}$

(!) si $C<0$ alors $-t^2+2C<0$

et donc aucune sol. ne correspond à $C<0$

(!) $t^2 \leq 1$

$\iff -1 \leq t \leq 1$