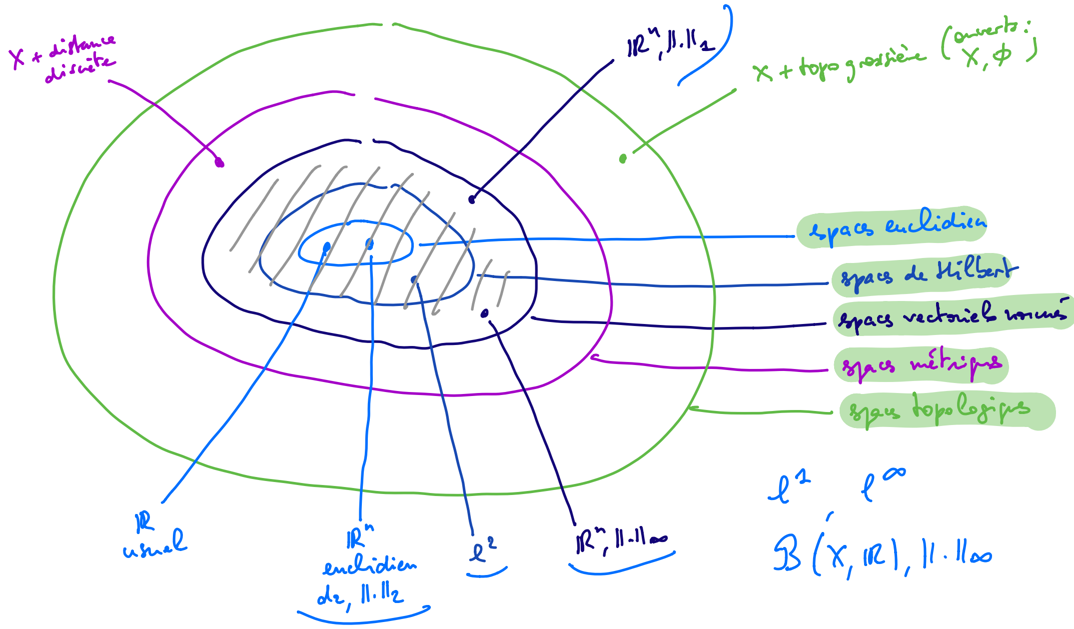


$\underbrace{\text{Espaces vectoriels normés}}_{\text{evn}}$ et $\underbrace{\text{espaces de Banach}}_{\text{evn complet}}$

Espaces vectoriels normés (!) $\mathbb{R}$-ev mais $\mathbb{C}$-ev ok aussi

$\underbrace{E \ \mathbb{R}\text{-ev} + \text{norme } N \text{ sur } E}_{\text{espace vectoriel normé (evn)}}$

$N : E \to \mathbb{R}$

1) $N(x) \geq 0_{\mathbb{R}}$ égalité ssi $x = 0_E$ $\quad x \in E$
2) $N(\lambda x) = |\lambda| N(x)$ $\quad \lambda \in \mathbb{R}, x \in E$
3) $N(x+y) \leq N(x) + N(y)$ $\quad x, y \in E$

N ou $\|\cdot\|$

N norme sur E ⇝ distance d sur E $\quad d(x,y) := N(x-y)$

un evn = un espace métrique (très) particulier

normes équivalentes N et N' normes sur E sont équivalents s'il existe $\alpha, \beta > 0$

tq $\forall x \in E \quad \alpha N(x) \leq N'(x) \leq \beta N(x)$

N et N' équivalents $\Rightarrow$ $\underbrace{d \text{ et } d'}_{\text{dist. associés}}$ fortement équivalents ($\Rightarrow$ même topo)

exemples : $\mathbb{R}, |\cdot|$ $\quad \mathbb{C}, |\cdot|$

$\mathbb{R}^n$ $\|\cdot\|_\infty$, $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ $\quad \mathbb{C}^n$

X ensemble qq $\mathcal{B}(X,\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty$ $\qquad$ $\mathcal{B}(X,\mathbb{C}), \|\cdot\|_\infty$

X espace top. cpct. $C^0(X,\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty$

$C^0([0,1],\mathbb{R})$ $\|\cdot\|_\infty, \|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$ $\qquad$ $\|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)|\,dt$ $\qquad$ $\|f\|_2 := \sqrt{\int_0^1 f(t)^2 dt}$

espaces de suites : $\ell^\infty, \ell^1, \ell^2$

<u>Sous-espace vectoriel normé</u> : $(E,\|\cdot\|_E)$ evn $\qquad$ F un sous-espace vectoriel de E

$\rightsquigarrow$ F muni de la norme induite $\|x\|_F := \|x\|_E$ $\forall x \in F$ (restriction de $\|\cdot\|_E$ à F)

$\rightsquigarrow$ $(F, \|\cdot\|_F)$ un evn

<u>ex</u> : X top compact $(C^0(X,\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$ sous-evn de $(\mathcal{B}(X,\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$

<u>Produit d'evn</u> $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ evn

$\rightsquigarrow$ $E\times F$ espace vect. produit

plusieurs normes associées à $\|\cdot\|_E$ et $\|\cdot\|_F$:

$$\begin{cases} \|(x,y)\|_\infty := \max(\|x\|_E, \|y\|_F) \\ \|(x,y)\|_1 := \|x\|_E + \|y\|_F \\ \|(x,y)\|_2 := \sqrt{\|x\|_E^2 + \|y\|_F^2} \end{cases}$$

(!) ces 3 normes sont équivalents :

$\|(x,y)\|_\infty \le \|(x,y)\|_2 \le \|(x,y)\|_1 \le 2\|(x,y)\|_\infty$

$\|(x,y)\|_1 \le 2\|(x,y)\|_\infty \le 2\|(x,y)\|_2$

$$\|x\|_E = \sqrt{\|x\|_E^2} \le \sqrt{\|x\|_E^2 + \underbrace{\|y\|_F^2}_{\geq 0}}$$

$$\|(x,y)\|_2^2 = \|x\|_E^2 + \|y\|_F^2$$

$$\|(x,y)\|_1^2 = (\|x\|_E + \|y\|_F)^2 = \|x\|_E^2 + \|y\|_F^2 + \underbrace{2\,\underbrace{\|x\|_E}_{\geq 0}\,\underbrace{\|y\|_F}_{\geq 0}}_{\geq 0}$$

<u>Normes équivalents et topologie</u>

<u>Prop</u> E un ev $\qquad$ N et N' normes sur E

N et N' sont équivalents $\Leftrightarrow$ N et N' définissent la m̂ topologie

$\Rightarrow$ ok

$\Leftarrow$?

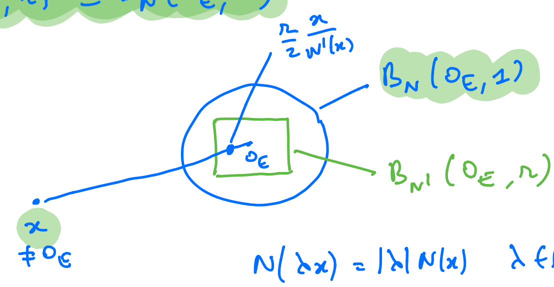
<u>dém</u> $\Leftarrow$ on suppose que N et N' définissent la m̂ topo

$B_N(0_E, 1)$ $\qquad$ est ouverte pour la norme N

boule unité ouverte pour la norme N $\qquad$ pour la topo associée à N

donc c'est aussi un ouvert pour N'

$0_E \in \underbrace{B_N(0_E, 1)}_{N'\text{-ouverte}}$ donc il existe $r > 0$ tq $B_{N'}(0_E, r) \subseteq B_N(0_E, 1)$ (!)



(!) si $x \in E$ n'est pas nul

alors $\frac{r}{2}\frac{x}{N'(x)} \in B_{N'}(0_E, r)$

$N'\left(\frac{x}{N'(x)}\right) = \frac{1}{N'(x)} N'(x) = 1$ ($N'(x) > 0$)

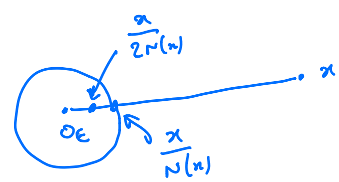
$N'\left(\frac{r}{2}\frac{x}{N'(x)}\right) = \frac{r}{2N'(x)} N'(x) = \frac{r}{2} < r$

$\frac{r}{2}\frac{x}{N'(x)} \in B_{N'}(0_E, r)$

$N(\lambda x) = |\lambda| N(x) \quad \lambda \in \mathbb{R}$

$N\left(\frac{x}{N(x)}\right) = N\left(\underbrace{\frac{1}{N(x)}}_{\lambda} x\right) = \left|\frac{1}{N(x)}\right| N(x)$ ($N(x) > 0$)

$= \frac{1}{N(x)} N(x) = 1$



donc (si $x \neq 0_E$) :

$\frac{r}{2}\frac{x}{N'(x)} \in B_N(0_E, 1)$

donc $N\left(\frac{r}{2}\frac{x}{N'(x)}\right) < 1$, donc $\frac{r}{2N'(x)} N(x) < 1$ c-à-d $N(x) < \underbrace{\frac{2}{r}}_{\text{cte}} N'(x)$

(!) si $x = 0_E$ $N(x) = N'(x) = 0_{\mathbb{R}}$

donc : $\forall x \in E, \quad N(x) \leq \frac{2}{r} N'(x)$

de m̂ : $\exists r' > 0$ tq $\forall x \in E, \quad N'(x) \leq \frac{2}{r'} N(x)$

Donc N et N' sont équivalents :

$N(x) \leq \frac{2}{r} N'(x)$ et $N'(x) \leq \frac{2}{r'} N(x) \quad \forall x \in E$

$$\boxed{\frac{r}{2} N(x) \leq N'(x) \leq \frac{2}{r'} N(x)}$$

Continuité des opérations dans un evn :

(E, N) un evn

- $N : E \longrightarrow \mathbb{R}$ est continue
- $E \times E \xrightarrow{+} \mathbb{R}$ est continue
- $\mathbb{R} \times E \xrightarrow{\cdot} \mathbb{R}$ est continue

dém 1) N est 1-lip. $\quad |N(x) - N(y)| \leq N(x - y)$ 2de inég Δ

$(E, N, d) \xrightarrow{N} (\mathbb{R}, |\cdot|)$

$N(x) = N(x - y + y) \leq N(x - y) + N(y)$

$N(x) - N(y) \leq N(x - y)$

$$|N(x)-N(y)| \leq N(x-y) = d(x,y)$$

2) si $(x_n, y_n) \to (x,y)$ dans $E \times E$ $\quad \|(x,y)\|_\infty = \max(\underbrace{\|x\|}_{N(x)}, \underbrace{\|y\|}_{N(y)})$

c-à-d $\left.\begin{array}{l} x_n \to x \\ y_n \to y \end{array}\right\}$ ds E

et donc $\|(x_n+y_n) - (x+y)\|_E = \|(x_n - x) + (y_n - y)\|_E \leq \underbrace{\|x_n - x\|_E}_{\to 0} + \underbrace{\|y_n - y\|_E}_{\to 0} \to 0$

$\|.\|_E = N$

donc $x_n + y_n \to x + y$

3) si $\left.\begin{array}{l} \lambda_n \to \lambda \text{ ds } \mathbb{R} \\ x_n \to x \text{ ds } E \end{array}\right)$ (!)

alors $\|\lambda_n x_n - \lambda x\|_E = \|\lambda_n x_n - \lambda_n x + \lambda_n x - \lambda x\|_E$

$= \|\lambda_n (x_n - x) + (\lambda_n - \lambda) x\|_E$

$\leq \|\lambda_n (x_n - x)\| + \|(\lambda_n - \lambda) x\|_E$

$= \underbrace{\underbrace{|\lambda_n|}_{\text{borné}} \underbrace{\|x_n - x\|_E}_{\downarrow n\infty\ 0}}_{\downarrow 0} + \underbrace{\underbrace{|\lambda_n - \lambda|}_{\downarrow n\infty\ 0} \underbrace{\|x\|_E}_{\text{cte}}}_{\downarrow 0} \longrightarrow 0$

car $\lambda_n \to \lambda$ ds $\mathbb{R}$

donc $\lambda_n x_n \to \lambda x$ ds E

Prop E un evn, F un sous-espace vect. de E

Alors $\overline{F}$ est encore un sev de E

dém

Soient $x, y \in \overline{F}$

il existe $\underset{\in F}{x_n} \xrightarrow[n\infty]{} x$ dans E et $\underset{\in F}{y_n} \xrightarrow[n\infty]{} y$ ds E

d'où $x_n + y_n \xrightarrow[n\infty]{} x + y$ ds E (!) F sev : $x_n + y_n \in F$

donc $x + y \in \overline{F}$

(!) $\overline{F}$ n'est pas vide... car $\underset{\neq \emptyset\ (0_E \in F)}{F} \subseteq \overline{F}$

de m̂ : si $\lambda \in \mathbb{R}$, $x \in \overline{F}$

⋮

alors $\lambda x \in \overline{F}$

Transfert de structure : image directe et image réciproque d'une norme par un isomorphisme

$$\underset{\uparrow \text{ + structure donnée}}{X} \xrightarrow{\text{"bij"}} \underset{\uparrow \text{ image de cette structure par la bij}}{Y}$$

la "bij" va devenir un isomorphisme de la structure ex : $(G, \bullet)$ groupe (structure)

$G \xrightarrow[\text{bijection}]{\phi} X$ — ϕ devient un isomorph de groupe

G : gpe, $\phi^{-1}(x), \phi^{-1}(y)$ — X : rien, $x, y \in X$

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{\phi} & X \\ \phi^{-1}(x) & \longmapsto & x \\ \phi^{-1}(y) & \longmapsto & y \\ \underbrace{\phi^{-1}(x) \bullet \phi^{-1}(y)}_{\in G} & \overset{\phi}{\longmapsto} & \underbrace{x \bullet y}_{\in X} \end{array}$$

(!)

$x \bullet y :\overset{?}{=} \phi\left(\phi^{-1}(x) \bullet_G \phi^{-1}(y)\right)$

$e_X = ? = \phi(e_G)$

$\underset{\forall x \in G}{e_X \bullet x} = \phi\left(\underbrace{\phi^{-1}(e_X)}_{\phi^{-1}(\phi(e_G))} \bullet_G \phi^{-1}(x)\right) = \phi\left(e_G \bullet \phi^{-1}(x)\right)$
$= \phi(\phi^{-1}(x))$
$= x$

ex : (X, d_X) métrique $\xrightarrow[\text{bij}]{\phi}$ Y, d_Y ← ens. qq

distance sur Y : $d_Y(y, y') =? = d_X(\phi^{-1}(y), \phi^{-1}(y'))$

ϕ devient une isométrie — d'espaces métriques

Ici : E et F deux espaces vectoriels isomorphes $E \xrightarrow{\phi} F$ iso d'espaces vect. choisi

① si N_E est une norme sur E

$(E, N_E) \longrightarrow F \quad N_F$

alors
$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "\phi"', "\text{iso}"] \arrow[dr, "N_E"'] & F \arrow[d, dashed] \\ & \mathbb{R} \end{tikzcd}$$
$\underbrace{N_F ? = N_E \circ \phi^{-1}}_{\text{ceci est une norme sur } F}$

de plus ϕ (qui n'était qu'une bijection au départ) devient une isométrie d'evn

$N_F(\phi(x)) = N_E(x)$

② de m : si N_F est une norme sur F, alors
$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "\phi"] \arrow[dr, dashed, "N_E"'] & F \arrow[d, "N_F"] \\ & \mathbb{R} \end{tikzcd}$$
$\underbrace{N_E = N_F \circ \phi}_{\text{ceci est une norme sur } E}$

$y \in F$ $\quad N_F(y) = N_E(\phi^{-1}(y)) \geq 0$

$N_F(y) = 0_{\mathbb{R}} \Rightarrow N_E(\phi^{-1}(y)) = 0_{\mathbb{R}}$
$\Rightarrow \phi^{-1}(y) = 0_E$
$\Rightarrow y = 0_F$

car ϕ est un iso d'espaces vect, $\phi(0_E) = 0_F$

$N_F(\underset{\in \mathbb{R}}{\lambda}\underset{\in F}{y}) = N_E(\phi^{-1}(\lambda y))$ ↓ ϕ^{-1} linéaire !
$= N_E(\lambda \phi^{-1}(y))$ ↓ N_E norme !
$= |\lambda| \, \underline{N_E(\phi^{-1}(y))}$
$= |\lambda| \, N_F(y)$

$$N_F(y+y') = N_E(\phi^{-1}(y+y')) \qquad \downarrow \phi^{-1} \text{ lin. !}$$
$$= N_E(\phi^{-1}(y)+\phi^{-1}(y'))$$
$$\leq N_E(\phi^{-1}(y)) + N_E(\phi^{-1}(y')) = N_F(y) + N_F(y')$$

Exemple (!)