Année 2020-2021 HLMA502 Topologie
L3 — Mathématiques

Examen (19 novembre 2020) correction

QCM

1. Ouverts, fermés
   a) $\mathcal{U}$ est un ensemble d'ouverts, A est la réunion des ouverts de $\mathcal{U}$ et B est l'intersection. Donc :
      — A est ouvert quel que soit $\mathcal{U}$ (fini, dénombrable...)
      — B est ouvert si $\mathcal{F}$ est fini.
   b) $\mathcal{F}$ est un ensemble de fermés, A est la réunion des fermés de $\mathcal{F}$ et B est l'intersection. Donc :
      — B est fermé quel que soit $\mathcal{F}$ (fini, dénombrable...)
      — A est fermé si $\mathcal{F}$ est fini.
2. Ouvertes ou fermées, ni ouvertes ni fermées
   a) Un espace topologique dont toutes les parties sont soit ouvertes soit fermées ? Dans la plupart des espaces, c'est faux. Mais c'est vrai pour la topologie discrète. Mais pas seulement : our l'espace de Sierpinski $\{a, b\}$ dont les ouverts sont $\emptyset, \{a\}, \{a, b\}$, toutes les parties sont ouvertes ou fermées, et la topologie n'est pas discrète.
   b) Un espace topologique qui possède des parties ni ouvertes ni fermées ? C'est la même question...
3. Parties de $\mathbb{Q}$. $\{x \in \mathbb{Q}\,;\, 2 \leq x^2 \leq 3\}$ est ouverte, fermée, bornée, pas compacte De même pour les autres parties.
4. Continuité
   a) Toutes les réponses sont fausses. Une application est continue si la préimage de tout ouvert et ouvert...
   b) Idem, même question formulée différemment !
5. Dans un espace métrique compact...
   a) Toute partie compacte est fermée.
   b) Et donc l'adhérence d'une partie compacte est compacte (c'est elle-même).
   c) Les boules fermées ne sont pas forcément compactes.
   d) Les parties fermées bornées ne sont pas forcément compactes.
   e) Les suites de points ne convergent pas toutes.
   f) Les recouvrements ouverts ne sont pas tous finis.

g) X n'est pas forcément compact, même si effectivement il se recouvre lui-même.

h) Il existe toujours un recouvrement ouvert fini de X.

i) On ne pourrait pas de manière équivalente utiliser les recouvrements fermés : tous les singletons étant fermés et recouvrant X, les seuls espaces compacts seraient les espaces finis.

Exercice 1. On se place dans $\mathbb{R}^2$ avec la distance euclidienne notée d. Soit $a \in \mathbb{R}^2$ un point fixé. Pour $x, y \in X$, on définit :

$$\delta(x, y) := \begin{cases} d(x, a) + d(a, y) & \text{si } x \neq y \\ 0 & \text{si } x = y \end{cases}$$

Pensez que a est le bureau de poste, et que vous voulez envoyer une lettre du point x au point y. La distance parcourue par la lettre est $\delta(x, y)$: elle doit d'abord aller de x à a, puis de a à x.

1. On vérifie sans difficulté les axiomes d'une distance. Ne pas oublier de montrer que $\delta(x, y) = 0$ implique $x = y$. Pour l'inégalité triangulaire en supposant par exemple que x, y, z sont trois points distincts :

$$\delta(x, z) = d(x, a) + d(a, z) \leq d(x, a) + d(a, y) + d(y, a) + d(a, z) = \delta(x, y) + \delta(y, z)$$

2. — Les δ-boules de centre a sont exactement les d-boules de centre a et même rayon, car $\delta(x, a) = d(x, a)$ pour tout x. Les suites qui δ-convergent vers a sont donc les suites qui convergent vers a pour d.
   — En revanche pour $x \neq a$:
   - $B_\delta(x, r) = \{x\}$ si $0 < r \leq d(x, a)$
   - $B_\delta(x, r) = \{x\} \cup B_d(a, r - d(x, a))$ si $r \geq d(x, a)$

   Les suites qui δ-convergent vers x sont donc les suites qui sont égales à x à partir d'un certain rang.
3. Soit A une partie de $\mathbb{R}^2$.
   a) Si $a \notin A$ alors pour tout point $x \in A$ on a $x \in \{x\} \subseteq A$ avec $\{x\}$ ouvert de X. Donc A est ouverte dans $(\mathbb{R}^2, \delta)$.
   b) On suppose que $a \in A$. On sait déjà que A est δ-voisinage de tout point x différent de A. Donc A est δ-ouvert si et seulement si A est δ-voisinage de a, si et seulement si A contient une δ-boule ouverte centrée en a, or on a dit que ce sont les d-boules centrées en a, donc A est ouvert si et seulement si c'est un d-voisinage de a.
4. Soient (X, d_X) un autre espace métrique et $f : \mathbb{R}^2 \to X$ une application. On peut raisonner sur les ouverts (comme ici) ou sur les suites.

a) $f : (\mathbb{R}^2, \delta) \to (X, d_X)$ est continue en tout point x différent de a : si V est un ouvert contenant $f(x)$, alors $f^{-1}(V)$ contient x et donc est un voisinage de x au sens de δ.

b) $f : (\mathbb{R}^2, \delta) \to (X, d_X)$ est continue en a si et seulement si $f : (\mathbb{R}^2, d) \to (X, d_X)$ est continue en a : si V est un ouvert contenant $f(a)$, alors $f^{-1}(V)$ est un δ-voisinage de a si et seulement si c'est un d-voisinage de a (les boules centrées en a sont les mêmes pour d et pour δ).

5. L'espace métrique $(\mathbb{R}^2, \delta)$ n'est pas compact, par exemple parce que la boule fermée de centre a et rayon 1 n'est pas compacte (alors qu'elle est fermée). Et celle-ci n'est pas compacte parce que (par exemple) tous les points de la sphère unité sont à distance 2 les uns des autres (donc toute suite de points distincts de la sphère unité ne possède aucune valeur d'adhérence).

Exercice 2. On considère un espace topologique $(X, \mathcal{O})$ et une partie $A \subseteq X$. On munit A de la topologie induite. Si B est une partie de A, on note $\mathring{B}$ l'intérieur de B dans X, et B^* l'intérieur de B dans A.

1. On sait que $\mathring{B}$ est un ouvert de X contenu dans B, donc contenu dans A. Donc $A \cap \mathring{B} = \mathring{B}$ est un ouvert de A contenu dans $A \cap B = B$. Donc $\mathring{B}$ est contenu dans B^*, le plus grand ouvert de A contenu dans B.

   $X = \mathbb{R}$ usuel, $A = B = [0, 1]$ donne un cas d'inclusion stricte : $\mathring{B} =]0, 1[$ et $B^* = [0, 1]$.

2. On suppose que A est un ouvert de X. Alors B^*, étant l'intersection de A avec un ouvert de X, est en fait un ouvert de X contenu dans B, donc B^* est contenu dans $\mathring{B}$, d'où finalement égalité.

3. Réciproquement, si $B^* = \mathring{B}$ pour toute partie $B \subseteq A$, alors en particulier $\mathring{A} = A^*$. Mais $A^* = A$, donc $A = \mathring{A}$ et A est ouvert.

Exercice 3. Soit (X, d) un espace métrique. On considère une application $f : X \to X$ telle que $d(f(x), f(y)) = d(x, y)$ quels que soient $x, y \in X$.

1. Si $f(x) = f(y)$, alors $d(f(x), f(y)) = 0$, donc $d(x, y) = 0$, donc $x = y$. Donc f est injective. De plus f est 1-lipschitzienne donc elle est continue.

2. On suppose maintenant que (X, d) est **compact**. Supposons que f ne soit pas surjective, et considérons un point $a \in X$ tel que $a \notin f(X)$. On définit une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de points de X en posant $x_0 := a$ et $x_{n+1} := f(x_n)$ pour $n \geq 0$.

   a) $f(X)$ est compact car c'est l'image d'un compact par une application continue. En particulier $f(X)$ est fermé dans X, donc son complémentaire est ouvert. Or $a \notin f(X)$, donc il existe $r > 0$ tel que $B(a, r) \subseteq X \setminus f(X)$, donc tel que $B(a, r) \cap f(X) = \emptyset$.

   b) Si $n \geq 1$, alors x_n appartient à $f(X)$ par construction. Donc $d(a, x_n) \geq r$ d'après la question précédente.

c) Soient $n, p \geq 0$ distincts. Supposons par exemple que $p > n$. On peut donc écrire $p = n + k$ avec k entier ≥ 1. Alors $r \leq d(a, x_k) = d(x_1, x_{k+1}) = d(x_2, x_{k+2}) = \cdots = d(x_n, x_{k+n})$. Donc $d(x_n, x_p) \geq r$.

d) La suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne possède donc pas de sous-suite convergente. Mais c'est une suite de X, qui est compact par hypothèse. Contradiction. On en déduit qu'il n'existe pas de $a \notin f(X)$, donc que $f(X) = X$, c'est-à-dire que $f(X)$ est surjective.