exercice 1 (X,d) métrique (x_n) suite de pts de X

(i) (x_n) est de Cauchy

(ii) $\forall \varepsilon>0, \exists N\in\mathbb{N} ; \forall n\geq N, \ d(x_N,x_n)<\varepsilon$

(iii) $\sup\limits_{k\geq n} d(x_k,x_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

(i) $\Rightarrow$ (ii) $\Rightarrow$ (iii) $\Rightarrow$ (i) ?

(i) $\Rightarrow$ (ii) soit $\varepsilon>0$, comme (x_n) est de Cauchy : il existe $N\in\mathbb{N}$ tq $n,p\geq N \Rightarrow d(x_n,x_p)<\varepsilon$

on a alors, pour un tel N : $\forall n\geq N, \ d(x_N,x_n)<\varepsilon$ (prendre $p=N$)

(ii) $\Rightarrow$ (iii)

quel que soit $\varepsilon>0$, il existe $N\in\mathbb{N}$ tel que pour tout $n\geq N$, $d(x_N,x_n)<\varepsilon$

d'où $\sup\limits_{n\geq N} d(x_N,x_n) \leq \varepsilon$

$\boxed{\forall\varepsilon>0, \exists N ; \sup\limits_{k\geq N} d(x_N,x_k) \leq \varepsilon}$ $\overset{?}{\Longrightarrow}$ $\Longrightarrow$

on l'a montré

donc ... la suite des sup tend vers 0

$\sup\limits_{k\geq n} d(x_k,x_n) \xrightarrow[n\infty]{} 0$

$\boxed{\forall\varepsilon>0, \exists N ; \forall n\geq N, \ \sup\limits_{k\geq n} d(x_k,x_n) \leq 2\varepsilon}$

on le veut

est-ce que $\{d(x_k,x_n) ; k\geq n, n\geq N\} \overset{?}{\subseteq} \{d(x_k,x_N) ; k\geq N\}$

$d(x_{N+1},x_{N+2})$ $\quad \overset{?}{\not\supseteq}$ $\quad d(x_N,x_{N+1})$

$d(x_n,x_k) \leq \underbrace{d(x_n,x_N)}_{\leq\varepsilon} + \underbrace{d(x_N,x_k)}_{\leq\varepsilon} \leq 2\varepsilon$

$k\geq n\geq N$

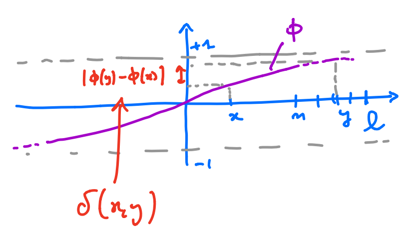
(iii) $\Rightarrow$ (i) Soit $\varepsilon>0$. Soit $N\in\mathbb{N}$; $\forall n\geq N$ $\sup\limits_{k\geq n} d(x_k,x_n) < \varepsilon$ donc (x_n) est de Cauchy

d'où $k\geq n\geq N \Rightarrow d(x_k,x_n)<\varepsilon$

exercice 2 $\mathbb{R}$ avec distance usuelle d

$\mathbb{R} \xrightarrow{\phi}]-1,1[$ C^0 strictement croissante

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} \phi(x) = \pm 1$



→ nouvelle distance sur $\mathbb{R}$, δ

$\delta(x,y) := |\phi(x)-\phi(y)|$

On considère la suite $(n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Elle est de Cauchy pour d ? NON $\quad$ si $n\neq p$, $d(n,p)=|p-n|\geq 1 > \underset{\varepsilon}{\frac{1}{2}} > 0$

Elle est de Cauchy pour δ ? OUI $\quad$ $\phi(n) \xrightarrow[n\infty]{} 1$ dans $\mathbb{R}$ donc $(\phi(n))_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans $\mathbb{R}$ pour la distance usuelle c-à-d. $\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n,p \geq N,\ \underbrace{|\phi(n) - \phi(p)|}_{\delta(n,p)} < \varepsilon$

"$n \to +\infty$" pour d

$(\mathbb{R}, \delta)$ est-il complet ? NON

par l'absurde : si $(\mathbb{R},\delta)$ était complet...

alors $(n)_{n\in\mathbb{N}}$ devrait converger dans $(\mathbb{R},\delta)$ vers $\ell \in \mathbb{R}$

d'où $\delta(n,\ell) \xrightarrow[n\infty]{} 0$

c-à-d $\underbrace{|\phi(n) - \phi(\ell)|}_{\downarrow n\infty \ \ 1\ ?} \xrightarrow[n\infty]{} 0$ dans au sens usuel

$\xrightarrow{n \to +\infty} |1 - \phi(\ell)| \neq 0$ car $\phi(\ell) < 1$

Contradiction

$(n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne cv (au sens de δ) vers aucun réel ℓ

car $\delta(n,\ell) \to |1 - \phi(\ell)| \neq 0$

Quelle conclusion ? d et δ sont topt équivalentes

$(\mathbb{R}, d)$ est complet

$(\mathbb{R}, \delta)$ ne l'est pas

"donc" la complétude est une notion métrique et pas une notion topologique !

TD 3 : δ donne la topo usuelle sur $\mathbb{R}$!

exercice 3 $\quad X = C^0([0,1], \mathbb{R})$ avec d_1

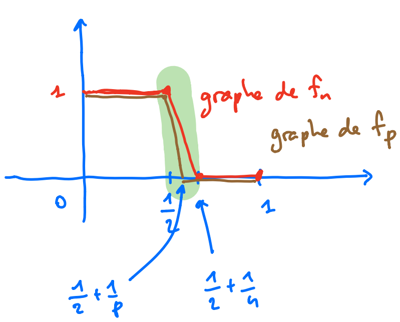
$n \geq 2$ entier

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ -nx + \frac{(n+2)}{2} & \text{si } \frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{n} \\ 0 & \text{si } \frac{1}{2} + \frac{1}{n} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

$\leftarrow f_n\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{n}{2} + \frac{n+2}{2} = 1$ (ok)

$f_n\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{n}\right) = -n\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{n}\right) + \frac{n+2}{2}$

$= -\frac{n}{2} - 1 + \frac{n}{2} + 1 = 0$ (ok)

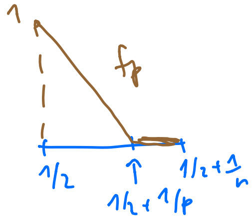


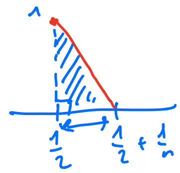
$x \mapsto -nx + \frac{n+2}{2}$ affine

$d_1(f_n, f_p) = ? = \int_0^1 \underbrace{|f_n(t) - f_p(t)|}\, dt = \underbrace{\int_0^{1/2}}_{0} + \underbrace{\int_{1/2}^{1/2+\frac{1}{n}}}_{??} + \underbrace{\int_{1/2+\frac{1}{n}}^{1}}_{0}$

$p > n$

$$= \int_{1/2}^{1/2+\frac{1}{n}} \left(f_n(t) - f_p(t)\right) dt = \underbrace{\int_{1/2}^{1/2+1/n} f_n(t)\,dt}_{\frac{1}{2n}} - \underbrace{\int_{1/2}^{1/2+1/n} f_p(t)\,dt}_{\frac{1}{2p}}$$





$$= \frac{1}{2n} - \frac{1}{2p}$$

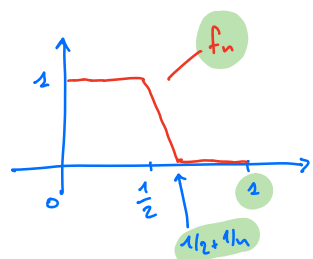
Ccl : $d_1(f_n, f_p) = \underbrace{\frac{1}{2n}}_{\downarrow\, 0} - \underbrace{\frac{1}{2p}}_{\downarrow\, 0}$ (si $p \geq n$) qd $n,p \to +\infty$ donc $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy

ccl finale : $(C^0([0,1],\mathbb{R}), d_\infty)$ est complet
$(C^0([0,1],\mathbb{R}), d_1)$ non
} donc d_1 et d_∞ pas fort^t éq.

(!) $C^0([0,1],\mathbb{R})$ est un ev de dim ∞ !

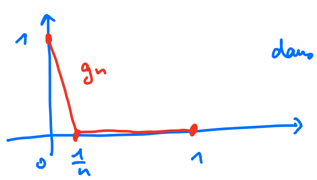
(3) Si $f_n \xrightarrow[n\infty]{} f$ pour d_1 ...

alors f_n convergerait vers f qui n'est pas continue donc qui n'est pas dans $C^0([0,1],\mathbb{R})$



$f \equiv 0$ sur $[0,\frac{1}{2})$ $f = 0$
$f(t) = 0$ $\forall t \in [0,\frac{1}{2})$

Q :



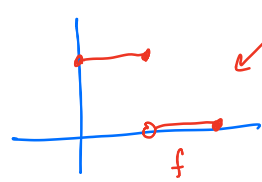
dans $(C^0([0,1],\mathbb{R}), d_1)$ d_∞ (C^0, d_1)

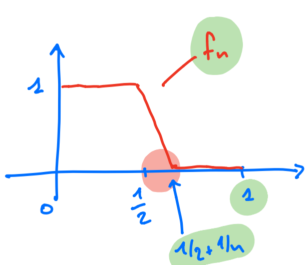
est-ce que $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge ? NON !

car la limite est discontinue

pour ? cs

OUI !
est-ce que $g_n \xrightarrow[n\infty]{} 0$?





Si $f_n \longrightarrow f$ dans $C^0([0,1],\mathbb{R})$ pour d_1 ...

• pourquoi $f \equiv 1$ sur $[0,1/2]$?

par hyp. $d_1(f_n, f) \xrightarrow[n\infty]{} 0$ c-à-d $\int_0^1 |f_n(t) - f(t)|\,dt \xrightarrow[n\infty]{} 0$

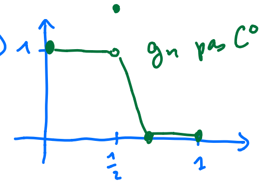
$$0 \leq \underbrace{\int_0^{1/2} |\underbrace{f_n(t)}_{1} - f(t)|\,dt}_{\text{fonction continue positive}} \leq \int_0^1 \underbrace{|f_n(t) - f(t)|}_{\geq 0}\,dt \xrightarrow[n\infty]{} 0$$

(!) si $f \equiv 1$ sur $[0, \frac{1}{2}[$

alors $f(1/2) = 1$?

oui, car f est continue par hyp

(!)



g_n pas C^0

$C^0_{pm}([0,1], \mathbb{R})$

$\int_0^1 |f_n(t) - g_n(t)|\, dt = 0$

"$d_1(f_n, g_n)$"

donc $\underbrace{\int_0^{1/2} |1 - f(t)|\, dt}_{=0} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

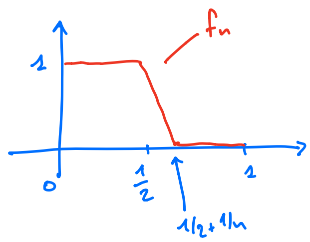
ainsi $\int_0^{1/2} \underbrace{|1 - f(t)|}_{\geq 0}\, dt = 0$

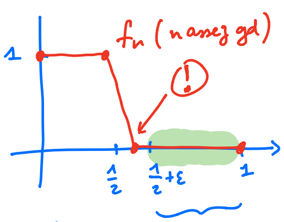
donc $\underbrace{f(t) - 1 = 0}_{f(t)=1}$ sur $[0, \frac{1}{2}]$

f est C^0

Même chose sur $]\frac{1}{2}, 1]$? $\int_{1/2}^1 |f_n(t) - f(t)| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ ok

mq $f(t) \equiv 0$ sur $]\frac{1}{2}, 1]$ $\iff$ mq $\left(f(t) \equiv 0 \text{ sur } [\frac{1}{2} + \varepsilon, 1]\right)$ pour tout $\varepsilon > 0$ (!)





$\frac{1}{2} + \frac{1}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{2}$

donc à partir d'un certain rang :

$\frac{1}{2} < \frac{1}{2} + \frac{1}{n} \leq \frac{1}{2} + \varepsilon$

soit $\varepsilon > 0$

au-delà de ce rang : se restreindre à $[\frac{1}{2} + \varepsilon]$

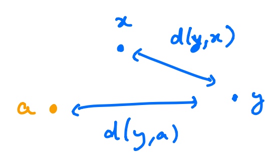
et tenir le m raisonnt que sur $[0, \frac{1}{2}]$

Conclusion : la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas dans $(C^0([0,1], \mathbb{R}), d_1)$

(si elle convergeait, sa limite ne serait pas continue en $\frac{1}{2}$, contradiction)

donc (f_n) est de Cauchy non cv

donc (C^0, d_1) n'est pas complet



exercice 4 (X,d) métrique non vide $a \in X$ fixé

$x \in X \rightsquigarrow f_x : X \to \mathbb{R}$

$y \longmapsto f_x(y) := d(y,x) - d(y,a)$

① $x, y \in X$ $|f_x(y)| = |d(y,x) - d(a,y)| \underset{\text{2de inég }\Delta}{\leq} \underbrace{d(x,a)}_{\text{ne dépend pas de } y \,!}$

donc f_x est bornée

② on a ainsi une application $(X,d) \longrightarrow (\mathcal{B}(X,\mathbb{R}), d_\infty)$ ← espace métrique complet (!)

$x \longmapsto f_x$

mq cette applic. préserve les distances

$[\mathcal{B}(X,\mathbb{R}) \subseteq X$? oups glups$]$

c-à-d quoi ?

$\forall x, x' \in X \quad \boxed{d_\infty(f_x, f_{x'}) = d_X(x, x')}$

où

$$d_\infty(f_x, f_{x'}) = \sup_{y\in X} |f_x(y) - f_{x'}(y)| = \sup_{y\in X} |d(y,x) - \cancel{d(y,a)} - d(y,x') + \cancel{d(y,a)}|$$

$$= \sup_{y\in X} \underbrace{|d(y,x) - d(y,x')|}_{\leq d(x,x') \text{ 2de inég } \Delta} \leq d_X(x,x')$$

or en prenant $y = x'$: $\longleftarrow$ $y = x$ marche aussi !

$$|f_x(x') - f_{x'}(x')| = |d(x,x') - \cancel{d(x',a)} - \underbrace{d(x',x')}_{=0} + \cancel{d(x',a)}|$$

$$= |d(x,x')|$$

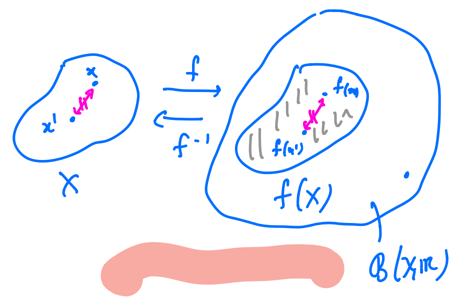
$$= d(x,x')$$

donc en fait le sup est un max et $\boxed{d_\infty(f_x, f_{x'}) = d(x,x')}$

ccl : $\underset{d}{X} \xrightarrow{f} \underbrace{\mathcal{B}(X,\mathbb{R})}_{d_\infty \text{ complet}}$ $\qquad \underset{d}{X} \xrightarrow{\text{bijecθ}} \underset{d_\infty}{f(X)} \subsetneq \mathcal{B}(X,\mathbb{R})$] (!)

préserve les distances (donc f injective)

les espaces métriques (X,d) et $(f(X), d_\infty)$ sont ... isométriques



singleton $\{*\}$ $\quad d(*,*) = 0$

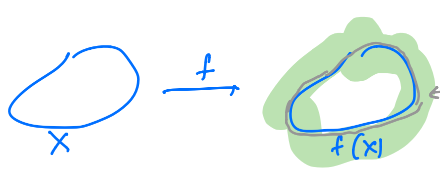
espace métrique complet

$X \overset{??}{\underset{\text{inj}}{\hookrightarrow}} \{*\}$

$\{*, \square\}$

$d(*, \square) = ??$

Mieux : on voudrait que (X,d) soit isométrique à une partie dense d'un espace métrique complet



exemple : quel serait le complété naturel de $\underbrace{\mathbb{Q} \cap [0,1]}_{\text{complet ? NON}}$? $\quad [0,1]$?

↑ complet ? oui car métrique compact

$\mathbb{Q}$ complet ? son complété : $\mathbb{R}$

$\mathbb{Q}$ dense dans $\mathbb{R}$!

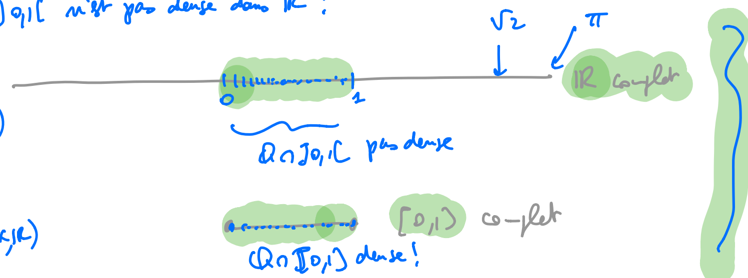
? $\begin{cases} [0,1] \text{ homéomorphe à } \overline{\mathbb{R}} \text{ cpct donc cplet} \\ \text{donc } [0,1] \text{ est complet} \end{cases}$

$$\mathbb{Q} \cap]0,1[\xhookrightarrow[\text{préserve les distances}]{\text{inclusion}} \mathbb{R}$$

$\mathbb{Q} \cap]0,1[$ n'est pas dense dans $\mathbb{R}$!

$$X \xhookrightarrow[\text{isom.}]{} f(X) \subseteq \underbrace{(\mathcal{B}(X,\mathbb{R}), d_\infty)}_{\text{gros}}$$

$f(X)$ a priori pas dense dans $\mathcal{B}(X,\mathbb{R})$



On voudrait un nouvel espace métrique complet dans lequel $f(X)$ soit dense ...

Que dire de l'adhérence de $f(X)$ dans $\mathcal{B}(X,\mathbb{R})$?

$\overline{f(X)}$ est un fermé dans $\mathcal{B}(X,\mathbb{R})$ qui est complet (pour d_∞)

donc $(\overline{f(X)}, d_\infty)$ est lui aussi complet

et... $f(X)$ est dense dans $\overline{f(X)}$ par définition !

$A \subseteq X$ top

A dense ds $X \iff \overline{A} = X$

ℓ^1 = ensemble des suites réelles $x = (x^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ telles que $\sum_{k\in\mathbb{N}} |x^{(k)}|$ converge

$\ell^1(\mathbb{R})$