(E) $y'(t) = a(t)y(t) + b(t)$ — équa diff linéaire

inconnue : fonction $y = y(t)$ ← t = le "temps" = la variable de dérivation, $y'(t) = \frac{dy}{dt}$

$a(t)$ = une fonction donnée

p.ex. $y' - 2ty = -(2t-1)e^t$

$\Leftrightarrow y'(t) = \underbrace{2t}_{a(t)}\, y(t) - (2t-1)e^t$

(H) équation homogène associée

$y'(t) = a(t)\,y(t)$

(!) $\underbrace{\text{les solutions de (E)}}_{\text{une coté de solutions}}$ sont de la forme : " $\underbrace{\text{sol. part. de (E)}}_{\substack{\text{n'importe quelle} \\ \text{sol. de (E)} \\ \text{(1 sol)}}} + \underbrace{\text{sol. g}^{\text{ale}}\text{ de (H)}}_{\substack{\text{une famille de sol.} \\ \text{(coté de sol.)}}}$ "

pourquoi ?

(!) si $y_p(t)$ est une "sol. part." de (E)

alors pour toute autre sol $y(t)$ de (E) :

$$\begin{cases} y_p'(t) = a(t)\,y_p(t) + b(t) \\ y'(t) = a(t)\,y(t) + b(t) \end{cases} \Rightarrow y'(t) - y_p'(t) = a(t)\,y(t) - a(t)\,y_p(t) + \cancel{b(t)} - \cancel{b(t)}$$

$\Leftrightarrow (y - y_p)'(t) = a(t)\,(y - y_p)(t)$

$\Leftrightarrow$ la fonction $\underbrace{y - y_p}_{Y(t)}$ est sol. de l'éq. homogène (H) $Y'(t) = a(t)\,Y(t)$

ccl : $y(t) - y_p(t) = \underbrace{y_h(t)}_{\text{sol. de l'éq. (H)}}$

$\Leftrightarrow y(t) = \underbrace{y_p(t)}_{\text{sol. part de (E)}} + \underbrace{y_h(t)}_{\text{sol. de (H)}}$

sol. de (H) : $y'(t) = a(t)\,y(t)$ ses sol : $y_h(t) = C\,e^{A(t)}$ où $A(t)$ = n'importe quelle primitive de $a(t)$ et C = une cte réelle

pourquoi ? ce sont bien des sol de (H) :

$$\frac{d}{dt}\left(C e^{A(t)}\right) = C \frac{d}{dt} e^{A(t)} = C\,A'(t)\,e^{A(t)}$$
$$= C\,a(t)\,e^{A(t)}$$
$$= a(t)\;C e^{A(t)}$$

donc $C e^{A(t)}$ vérifie (H)

ce sont les seules solutions de (H) (il n'y en a pas d'autres)

si $y_h(t)$ est sol. de (H)

dc $y_h'(t) = a(t)\,y_h(t)$

on dérive $y_h(t)\,e^{-A(t)}$:

on veut mq : $\exists C \in \mathbb{R} ;\ y_h(t) = C e^{A(t)}\ (\forall t)$

$\Updownarrow$

$y_h(t)\,e^{-A(t)} = C\ (\forall t)$

$$\frac{d}{dt}\left(y_h(t)\,e^{-A(t)}\right) = y_h'(t)\,e^{-A(t)} + y_h(t)\left(-a(t)\,e^{-A(t)}\right)$$

$$= a(t)\,y_h(t)\,e^{-A(t)} - a(t)\,y_h(t)\,e^{-A(t)} = 0 \quad (\forall t)$$

donc la fonction $y_h(t)\,e^{-A(t)}$ est constante

d'où : $\exists$ C cte réelle tq $y_h(t) = C\,e^{A(t)}$

<u>exemple</u> résoudre

① $\underbrace{y' + 2y = t^2}_{(E)}$ ← un <u>polynôme</u> (de d°2)

$y' = -2y + t^2$

$$y(t) = \underbrace{C\,e^{-2t}}_{\substack{\text{sol. } g^{ale} \\ \text{de } (H)}} + \underbrace{t^2/2}_{\substack{\text{une sol} \\ \text{part. de } (E)}}$$

($-2t$: primitive de -2 ; $t^2/2$: ?)

où $C \in \mathbb{R}$

⚠ on essaie : $\underbrace{\frac{d}{dt}\left(\frac{t^2}{2}\right)}_{t} + 2\left(\frac{t^2}{2}\right) \overset{?}{=} t^2$

$t + t^2 \overset{?}{=} t^2$ non

$\exists$? sol cte $\left.\begin{array}{l} y(t) = k \\ y'(t) = 0 \end{array}\right) \to 2k = t^2 \to k = \frac{t^2}{2}$ pas cte

$\underbrace{y'}_{0} + 2y = 1 \to 2y = 1 \to y = \frac{1}{2}$) ok c'est bien une cte !

pour trouver une sol. part

- chercher une sol. part. d'un certain type (en fonction de la forme de $a(t)$ et $b(t)$)
- méthode de la variaᶿ de la cte

↓

ici : chercher une sol part. de (E) de la forme $y_p(t) = at^2 + bt + c$

a, b, c à déterminer

(E) $y' + 2y = t^2$

$$\underbrace{\frac{d}{dt}(at^2 + bt + c)}_{2at + b} + 2(at^2 + bt + c) \overset{?}{=} t^2$$

$$\underbrace{(\;\;)}_{\uparrow 1}t^2 + \underbrace{(\;\;)}_{\shortparallel\, 0}t + \underbrace{(\;\;)}_{\shortparallel\, 0} \overset{?}{=} t^2$$

$$\rightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ b = -\frac{1}{2} \\ c = \frac{1}{4} \end{cases}$$

Ainsi :

$y_p(t) = \frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{2}t + \frac{1}{4}$

est sol part. de (E)

<u>ccl</u> : la sol. g^{ale} de (E) est $y(t) = C\,e^{-2t} + \frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{2}t + \frac{1}{4}$ (où $C \in \mathbb{R}$) une acté de solutions

⊕ ci $y(0) = 1$ ⇝ $1 = C + \frac{1}{4}$ d'où $C = \frac{3}{4}$

↳ une <u>unique sol</u> :

$$y(t) = \frac{3}{4}e^{-2t} + \frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{2}t + \frac{1}{4}$$

(E) $y' + 2y = t^2$ sol gale de (H) : $y_h(t) = Ce^{-2t}$ (où $C \in \mathbb{R}$)

méthode de la variaθ de la cte :

on cherche une fonction $C(t)$ de sorte que $y_p(t) = \underline{C(t)\, e^{-2t}}$ soit sol. de (E)

on remplace dans (E) :

$$\underbrace{\frac{d}{dt}\left(C(t)\, e^{-2t}\right)} + 2\, C(t)\, e^{-2t} \overset{?}{=} t^2$$

$$c'(t)\, e^{-2t} + \cancel{C(t)\left(-2e^{-2t}\right)} + \cancel{2\, C(t)\, e^{-2t}} \overset{?}{=} t^2$$

$$\frac{1}{e^x} = e^{-x}$$

$$\iff c'(t)\, e^{-2t} = t^2$$

$$\iff \underbrace{c'(t) = \frac{t^2}{e^{-2t}} = t^2 e^{2t}}_{\substack{\text{on s'est ramené à chercher} \\ \text{"la" primitive de } t^2 e^{2t}}}$$

$$\boxed{\int_a^b u(t)\, v'(t)\, dt = \big[u(t)\, v(t)\big]_a^b - \int_a^b u'(t)\, v(t)\, dt}$$

$$\int \underset{u}{t^2}\, \underset{v'}{e^{2t}}\, dt = ? = t^2\, \frac{e^{2t}}{2} - \int \cancel{2}t\, \frac{e^{2t}}{\cancel{2}}\, dt$$

$$= \frac{t^2}{2} e^{2t} - \int \underset{u}{t}\, \underset{v'}{e^{2t}}\, dt$$

$$= \frac{t^2}{2} e^{2t} - \left[\underset{u}{t}\, \underset{v}{\frac{e^{2t}}{2}} - \int \frac{e^{2t}}{2}\, dt\right] = \overbrace{\frac{t^2}{2} e^{2t} - \frac{t}{2} e^{2t} + \frac{e^{2t}}{4}}^{C(t)}$$

$(+ \text{cte})$

$\rightarrow$ une sol. part $y_p(t) = \left(\frac{t^2}{2} e^{2t} - \frac{t}{2} e^{2t} + \frac{e^{2t}}{4}\right) e^{-2t}$ (!)

$$= \frac{t^2}{2} - \frac{t}{2} + \frac{1}{4} \quad (!)$$

exemple résoudre $y'(t) + y(t) = 2 \sin t$ $\leftarrow$

$$(H) \rightarrow y_h(t) = C\, e^{-t} \quad (C \in \mathbb{R})$$

$\uparrow$

$y' + y = 0$

sol part ? — $y_p(t) \overset{?}{=} e^{-2\cos t}$ $\xrightarrow{d/dt}$ $2 \sin t\, e^{-2\cos t}$ NON...

$y_p(t) = a \cos t + b \sin t$ où a, b réels à déterminer (!)

$$\underbrace{\frac{d}{dt}\left(a \cos t + b \sin t\right) + \left(a \cos t + b \sin t\right)} \overset{?}{=} 2 \sin t$$

$$\rightarrow -a \sin t + b \cos t + a \cos t + b \sin t = 2 \sin t$$

$$\iff \begin{cases} -a + b = 2 \\ a + b = 0 \end{cases}$$

$y_p(t) = \sin t - \cos t$ convient ? oui ccl : la sol gale de $y'+y = 2\sin t$

est $y(t) = \sin t - \cos t + Ce^{-t}$ où $C \in \mathbb{R}$

exos

① $y' - y = (t+1)e^t$

② $y' - y = t - e^t + \cos t$

③ $(t^2+1)y' + 2ty + 1 = 0$

④ $y' + y = \dfrac{1}{1+e^t}$

⑤ $y' - 2ty = -(2t-1)e^t$

① $y' - y = (t+1)e^t$ $\quad y = y(t) \quad y' = y'(t)$

c'est une équa diff d'ordre 1 linéaire non-homogène

- (H) $y' - y = 0$ $\quad y_H(t) = Ce^t$ où $C \in \mathbb{R}$
- sol part. $\begin{cases} y_1' - y_1 = te^t \\ y_2' - y_2 = e^t \end{cases}$ ⚠ "superposition des solutions" pour une éq. linéaire

alors $y := y_1 + y_2$ vérifie $y'(t) = y_1'(t) + y_2'(t)$

$y'(t) - y(t) = (\quad) - (y_1(t) + y_2(t))$

$= \underbrace{y_1'(t) - y_1(t)}_{te^t} + \underbrace{y_2'(t) - y_2(t)}_{e^t}$

$y' - y = te^t$

sol : $y_1(t) = \underbrace{\frac{t^2}{2}}_{ok?} e^t$

te^t = polynôme × exp

$\left(P(t)e^{\alpha t}\right)' = P'(t)e^{\alpha t} + P(t)\alpha e^{t}$

$= \underbrace{\left(P'(t) + \alpha P(t)\right)}_{pol.} \underbrace{e^{\alpha t}}_{ou\ exp}$

$y_1' = te^t + \frac{t^2}{2}e^t$

$y_1' - y_1 = te^t + \cancel{\frac{t^2}{2}e^t} - \cancel{\frac{t^2}{2}e^t}$

$= te^t$ ⚠

$\begin{cases} y' - y = 1\, e^t \\ \text{sol} : y_2(t) = ?\ te^t\ ? \end{cases}$

$(te^t)' - te^t$

$= e^t + \cancel{te^t} - \cancel{te^t} = e^t$ ⚠

⚠ $y'(t) - y(t) = \underbrace{(t+1)}_{poly.}\underbrace{e^t}_{exp}$

possible de faire directt ici

$y_p(t) = \underbrace{(at^2 + bt + c)}_{a,b,c=?} e^t$

une sol part. de $y' - y = (t+1)e^t$

est donc $y_p(t) = \frac{t^2}{2}e^t + te^t = \left(\frac{t^2}{2} + t\right)e^t$

$y_H = Ce^t \quad C \in \mathbb{R}$

variat° de la cte $\quad y' - y = (t+1)e^t$

on cherche une sol part. de la forme $y(t) = C(t)e^t$ où $C(t)$ fonction à déterminer

on dérive et on remplace ds l'éq.

$y'(t) - y = (t+1)e^t \iff C'(t)e^t + C(t)e^t - C(t)e^t = (t+1)e^t$

$\iff C'(t)e^t = (t+1)e^t$

$\iff C'(t) = t+1$

$\Leftarrow C(t) = \frac{t^2}{2} + t \quad (+cte)$

donc $y(t) = \left(\frac{t^2}{2}+t\right)e^t$ est ^une sol part. de $y' - y = (t+1)e^t$

③ $(t^2+1)y'(t) + 2t\,y(t) + 1 = 0 \quad \overset{?}{\rightsquigarrow} \quad y'(t) + a(t)\,y(t) = b(t)$

pb ? ce terme (en t) s'annule qq part ? non, nulle part

$y'(t) + \frac{2t}{t^2+1}\,y(t) + \frac{1}{t^2+1} = 0$

$\iff \boxed{y'(t) + \frac{2t}{t^2+1}\,y(t) = \frac{-1}{t^2+1}}$

exos

③ $(t^2+1)y' + 2ty + 1 = 0$

② $y' - y = t - e^t + \cos t$

④ $y' + y = \frac{1}{1+e^t}$

⑤ $y' - 2ty = -(2t-1)e^t$

③ $(t^2+1)\,y'(t) + 2t\,y(t) = -1 \iff y'(t) + \underbrace{\frac{2t}{t^2+1}}_{a(t)}\,y(t) = \underbrace{\frac{-1}{t^2+1}}_{b(t)}$

(H) $y' + \frac{2t}{t^2+1}\,y(t) = 0$

sol : $y_h(t) = C\,e^{-\ln(t^2+1)}$

$= C\left(\frac{1}{t^2+1}\right) = \frac{C}{t^2+1}$

$\begin{cases} y'(t) + a(t)\,y(t) = 0 \\ y(t) = C\,e^{A(t)} \end{cases}$ $\quad A'(t) = a(t)$

$e^{-x} = \frac{1}{e^x}$

$\mathbb{R} \underset{\ln}{\overset{\exp}{\rightleftarrows}}]0, +\infty[$

sol part ?

| mvc

on cherche une sol part. de la forme $y(t) = \frac{C(t)}{1+t^2}$ où $C(t)$ est à déterminer

on dérive et on remplace :

$$\underbrace{(t^2+1)\left(\frac{C'(t)}{t^2+1} + C(t)\frac{-2t}{(t^2+1)^2}\right) + 2t\,\frac{C(t)}{1+t^2}}_{\overset{?}{=}\ C'(t)} = -1$$

$C'(t) = -1$

$C(t) = -t$ (+ cte)

une sol part. est $y_p(t) = \frac{-t}{t^2+1}$

ccl : sol gale $y(t) = \frac{-t}{t^2+1} + \frac{c}{t^2+1} = \frac{-t+c}{t^2+1}$ (où $c \in \mathbb{R}$)

+ CI $y(0) = 2$

$\rightarrow 2 = \frac{c}{1}$ $\boxed{c=2}$

$\exists!$ sol $y(t) = \frac{-t+2}{t^2+1}$

⑤ $y'(t) - 2t\,y(t) = -(2t-1)e^t = -2te^t + e^t$

éq. hom $y'(t) - 2ty(t) = 0$

$y_h(t) = C e^{t^2}$ avec $C \in \mathbb{R}$

MCV on cherche $y(t) = C(t)e^{t^2}$

$\rightarrow C'(t)e^{t^2} + 2tC(t)e^{t^2} - 2tC(t)e^{t^2} \overset{?}{=} -2te^t + e^t$

$\Leftrightarrow C'(t)e^{t^2} = -2te^t + e^t = e^t(-2t+1)$

$\Leftrightarrow C'(t) = \frac{e^t(-2t+1)}{e^{t^2}} = \underbrace{(-2t+1)}_{u'(t)}\underbrace{e^{-t^2+t}}_{e^{u(t)}}$

$\Leftrightarrow C(t) = e^{-t^2+t}$ (+ cte)

$\rightarrow$ sol part. $y(t) = e^{-t^2+t}e^{t^2} = e^t$

sol part (!) $y(t) = e^t$ ça marche !

$e^t - 2te^t \overset{(!)}{=} -2te^t + e^t$

$\frac{e^t}{e^{t^2}} \overset{?}{=} \frac{1}{e^t}$

$e^{-x} = \frac{1}{e^x}$ $\quad \frac{e^t}{e^{t^2}} = e^t e^{-t^2} = e^{-t^2+t}$

$e^a e^b \overset{?}{=} e^{a+b}$

(!) équa diff linéaire d'ordre 1 $\quad y'(t) + a(t)y(t) = b(t)$

(H) $\rightarrow$ sol $y_h(t) = C e^{-A(t)}$ où A primitive de a

MVC : on cherche une sol part. de la forme $y(t) = C(t)e^{-A(t)}$

ccl sol gale $y(t) = e^t + Ce^{t^2}$ où $C \in \mathbb{R}$

⑦ $y' - y = t - e^t + \cos t$ (E)

(H) $y' - y = 0$ sol $y_h(t) = Ce^t$ où $C \in \mathbb{R}$

sol part ? MVC : on cherche une sol part. de (E) de la forme $\underbrace{y(t) = C(t)e^t}_{uv}$

(où $C(t)$ à déterminer)

on dérive et on remplace :

$(uv)' =$

$$\underbrace{y'(t) - y(t)}_{\shortparallel} = t - e^t + \cos t$$

$$c'(t)e^t + C(t)e^t - C(t)e^t = t - e^t + \cos t$$

$$\Leftrightarrow C'(t) = (t - e^t + \cos t)\, e^{-t} = \underbrace{t e^{-t}}_{\text{ipp}} - 1 + \underbrace{\cos t\, e^{-t}}_{??}$$

$$\int t e^{-t} \, dt = \text{ipp}$$

superposition des solutions

$$y' - y = t - e^t + \cos t$$

sol part de $y' - y = t$ (y_1)

sol part. de $y' - y = -e^t$ (y_2)

sol part. de $y' - y = \cos t$ (y_3)

$\to y_1 + y_2 + y_3$ sera sol. part de

$$y' - y = t \quad \text{sol part} \quad y_1(t) = at + b = \underset{\sim\sim}{-t - 1}$$

$$(-1) - (-t - 1) = -1 + t + 1 = t \quad \text{ok}$$

$$y' - y = -e^t \quad \text{sol part} \quad y_2(t) = \,?\, e^t$$

$$y' - y = \cos t \quad \text{sol part} \quad y_3(t) = \,?\, \cos t + \,?\, \sin t$$

⊕ exos $\quad y'(t) - \frac{2}{t} y(t) = t^2 \quad (t > 0)$

$$\begin{cases} y'(t) + \tan(t)\, y(t) = \sin(2t) & \text{sur }]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\\ y(0) = 1 \end{cases}$$

Equations différentielles à variables séparables / à variables séparées

équa diff (d'ordre 1) de la forme :

$$y'(t) = \underbrace{g(t)}_{\text{une fonction de } t}\ \underbrace{h(y(t))}_{\text{une fonction de } y = y(t)} = g(t)\, h(y(t))$$

ex : $y'(t) = y(t)^2 = 1 \cdot y(t)^2$; $g(t) = 1$, $h(y) = y^2$

$y'(t) = -\dfrac{t}{y(t)} = (-t)\dfrac{1}{y(t)}$; $g(t) = -t$, $h(y) = \dfrac{1}{y}$

ex : $y'(t) = \cos(t + y(t)) = ??$

$\cancel{=}\ (\quad)(\quad)$ — en t, en $y(t)$

$(t+1)\, y'(t) + t\, y(t)^2 = 0$, $t \geq 0$

$y'(t) = -\dfrac{t}{t+1}\, y(t)^2$

! de manière informelle (= qui plait moyennement aux puristes)

$y'(t) = y(t)^2 \longleftrightarrow \dfrac{dy}{dt} = y(t)^2 \longleftrightarrow \dfrac{dy}{dt} = y^2 \longleftrightarrow \dfrac{dy}{y^2} = dt$

comme si t et y étaient deux "variables" ± indépendants

$\longleftrightarrow \displaystyle\int \frac{dy}{y^2} = \int dt$

$\longleftrightarrow -\dfrac{1}{y} = t + cte$ ← ! on trouve y en fonction de t

$\longleftrightarrow y(t) = \dfrac{-1}{t + C}$ où $C \in \mathbb{R}$

!

$y'(t) = (1+t^2)\, y(t)^3$

$y' = (1+t^2)\, y^3$

$y'(t) = \underline{(1+t^2)\, y} + \underline{(1+t^3)\, y^2}$

$\cancel{=}\ (\underbrace{\qquad}_{\text{que du } t})(\underbrace{\qquad}_{\text{que du } y})$??