thm du pt fixe de Banach = thm des contractions

Théorème de prolongement des applications uniformément continues

(X, d_X) et (Y, d_Y) espaces métriques $\quad A \subseteq X$ donnée

$f : A \to Y$ une application donnée

hyp : (i) A est dense dans X

(ii) f est uniformément continue

(iii) Y est complet

Alors : il existe une unique application continue $F : X \to Y$ telle que $F_{|A} = f$.

De plus, F est uniformément continue.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[dr, dashed, "F"] & \\ A \arrow[u, "\text{inclusion}"] \arrow[r, "f"'] & Y \end{tikzcd}$$

"diag. commutatif" $\forall a \in A : \; f(a) = F(a)$

$a \in A \to f(a)$

dém Unicité Soient $F, G : X \to Y$ deux prolongements continus de f

$$\begin{tikzcd} X \arrow[dr, "F", shift left] \arrow[dr, "G"', shift right] & \\ A \arrow[u] \arrow[r, "f"'] & Y \end{tikzcd}$$

$\forall a \in A : \; f(a) = F(a) = G(a)$

Soit $x \in X$. Par densité de A dans X :

on choisit une suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de pts de A

telle que $a_n \xrightarrow[n \to \infty]{} x$ $\quad$ (densité : $\bar{A} = X$)

Mais alors : $F(a_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} F(x)$ car F C^0

$\qquad\qquad\; \| \qquad\qquad\qquad \|$

$\qquad\quad G(a_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} G(x)$ car G C^0

$\qquad\qquad\; \|$

$\qquad\quad f(a_n)$ car F et G prolongent f (et $a_n \in A$)

En passant à la limite : $F(x) = G(x)$

Ainsi $F(x) = G(x) \quad \forall x \in X$

Alors : il existe une unique application continue $F : X \to Y$ telle que $F_{|A} = f$.

De plus, F est uniformément continue.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[dr, dashed, "F"] & \\ A \arrow[u, "\text{inclusion}"] \arrow[r, "f"'] & Y \end{tikzcd}$$

complet

"diag. commutatif" $\forall a \in A : \; f(a) = F(a)$

Existence Arriver à définir $F(x)$ pour $x \in X - A$ (pour $x \in A$, on doit poser $F(x) = f(x)$ ...)

① Soit $x \in X$. Par densité de A : il existe une suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de pts de A

telle que $a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x$. Idée : regarder la suite $(f(a_n))_{n \in \mathbb{N}}$ dans Y...

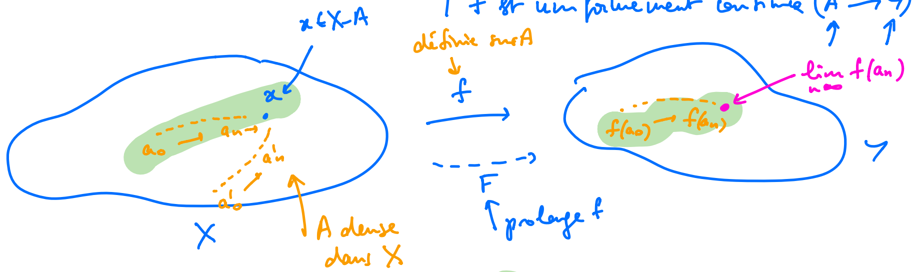
On va mq elle converge dans Y ...

Q : pourquoi $(f(a_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge-t-elle ? (ds Y)

parce que c'est une suite de Cauchy de Y ⊕ Y complet

car (a_n) cv dans A, donc de Cauchy (ds A) (donc ds X)

f est uniformément continue ($A \to Y$)

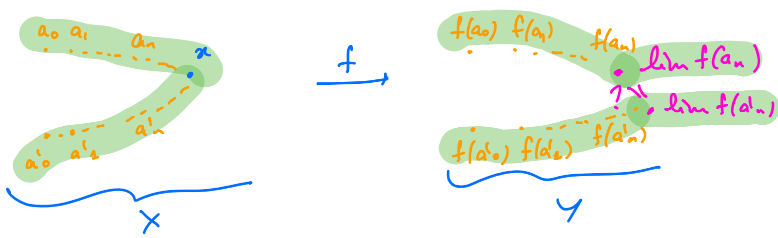


(!) on a envie de poser $F(x) := \lim_{n\infty} f(a_n)$

Q : est-ce que cette limite ne dépend que de x et pas de la suite (a_n) choisie ?

si (a'_n) est une autre suite de pts de A qui cv vers x

$[0,1) \hookrightarrow$ incl $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$; $]0,1[$



(!) $\underbrace{\underbrace{a_0, a'_0, a_1, a'_1, \dots, a_n, a'_n}_{\text{pts de } A} \xrightarrow[n\infty]{} x}_{\text{dans } X}$ donc $f(a_0), f(a'_0), \dots, f(a_n), f(a'_n) \longrightarrow$ qq ch de Y

argument précédent

donc les suites $(f(a_0), f(a_1), \dots, f(a_n), \dots)$ et $(f(a'_0), f(a'_1), \dots, f(a'_n) \dots)$ doivent avoir la même limite : elles sont extraites d'une même suite convergente !

On a donc construit l'application $F : X \longrightarrow Y$

$$x \longmapsto F(x) = \lim_{n\infty} f(a_n)$$

$$x = \lim_{n\infty} a_n \quad (a_n \in A\ \forall n)$$

(2) Cette application F prolonge bien f :

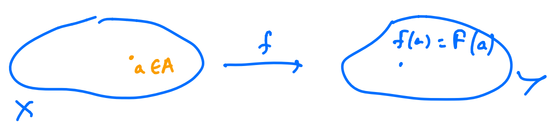
$$\begin{tikzcd} a \in X \arrow[r, dashed, "F?"] & Y \\ A \arrow[u, hook] \arrow[ur, "f"'] & \end{tikzcd}$$

si $a \in A$

$F(a) = \lim_{n\infty} f(a) = f(a)$

suite de pts de A qui cv vers a

cte !

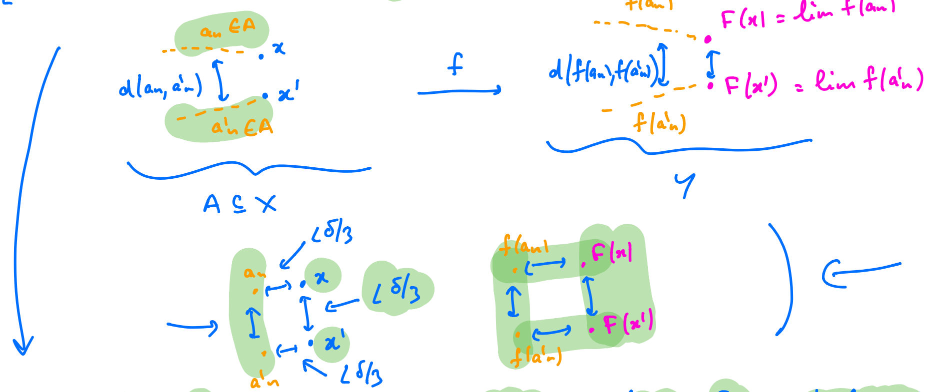


③ F est uniformément continue : $\qquad F : X \to Y$

mq $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta' > 0 ; \forall x, x' \in X, \; d_X(x,x') < \delta' \Rightarrow d_Y(F(x), F(x')) < \varepsilon$

Soit $\varepsilon > 0$.

Puisque $f : A \to Y$ est (par hyp) unif^t continue :
il existe un $\delta > 0$ tel que :
$\forall a, a' \in A, \; d_X(a,a') < \delta \Rightarrow d_Y(f(a), f(a')) < \varepsilon/3$



(!) Si $d_X(x,x') < \frac{\delta}{3}$ alors $\exists N \in \mathbb{N} ; \forall n \geq N, \; d_X(a_n, x) < \delta/3$ et $d_X(a'_n, x') < \delta/3$

alors, si $n \geq N$: $d_X(a_n, a'_n) \leq d(a_n, x) + d(x,x') + d(x', a'_n) < 3\frac{\delta}{3} = \delta$

Alors : si n est assez gd :

$$d_Y(F(x), F(x')) \leq \underbrace{d_Y(F(x), f(a_n))}_{< \varepsilon/3} + \underbrace{d_Y(f(a_n), f(a'_n))}_{\varepsilon/3} + \underbrace{d_Y(f(a'_n), F(x'))}_{< \varepsilon/3} < \varepsilon$$

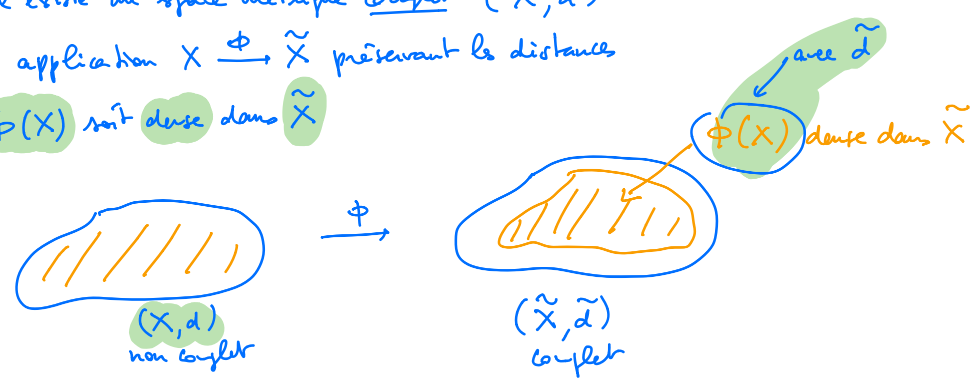
car $f(a_n) \to F(x)$ $\qquad$ car $f(a'_n) \to F(x')$

$\delta' = \delta/3$

Complétion d'un espace métrique

Thm Soit (X,d) métrique (non complet)

Alors il existe un espace métrique complet $(\tilde{X}, \tilde{d})$
et une application $X \xrightarrow{\Phi} \tilde{X}$ préservant les distances
tq $\Phi(X)$ soit dense dans $\tilde{X}$



(!) Φ préserve les distances donc elle est... continue ⊕ injective

$\forall x,y \in X,\ d(x,y) = \tilde{d}(\Phi(x),\Phi(y))$

cours

$\Phi(x) = \Phi(y) \Rightarrow \tilde{d}(\Phi(x),\Phi(y)) = 0$
$\Rightarrow d(x,y) = 0$
$\Rightarrow x = y$

donc

$\left.\begin{matrix} X \xrightarrow{\Phi} \Phi(X) \\ d \qquad\quad \tilde{d} \end{matrix}\right]$ est une isométrie

bijection ⊕ préserve les distances

essentiellement : (X,d) et $(\Phi(X),\tilde{d})$ sont "les mêmes" espaces métriques

(ils sont isométriques)

(!) $\Phi(X)$ peut-il être fermé ds $\tilde{X}$?

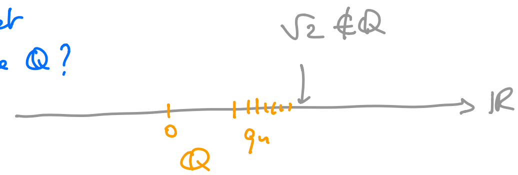
seulement si $\Phi(X) = \tilde{X}$ (puisque $\overline{\Phi(X)} = \tilde{X}$!)

donc seulement si (X,d) était déjà... complet !

2 dém → longue → (!) notes de cours ⊕ poly
→ courte (⊕ astucieuse) → TD

construction de $\mathbb{R}$ à partir de $\mathbb{Q}$?

idée (!) on sait que $\mathbb{Q}$ n'est pas complet
comment construire $\mathbb{R}$ à partir de $\mathbb{Q}$?
comment "compléter" $\mathbb{Q}$?

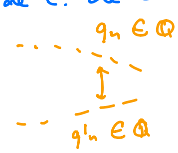


on veut "forcer" les suites de Cauchy de $\mathbb{Q}$
à converger, même celles qui ne cv pas !

On va dire qu'un réel "est" une suite de Cauchy...

$\mathcal{C}(\mathbb{Q})$ = l'ens. des suites de C. de $\mathbb{Q}$

$\mathbb{R} := \mathcal{C}(\mathbb{Q})/\sim$



$(q_n) \sim (q'_n)$

si $q_n - q'_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$