Master MIND et Biostat
Contrôle Terminal
Statistique Inférentielle (HMMA 102)
13 janvier 2020 de 16h00 à 18h0

<u>Éléments autorisés:</u> Antisèche *officielle* + calculatrice.

<u>EXERCICE 1)</u> (8 points) Soit ($\mathcal{X}$, {$\mathbb{P}_\theta$, $\theta \in \Theta$}), le modèle statistique d'un échantillon X_1,..., X_n de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées (*iid*) issues de la fonction de masse (elles sont donc **<u>discrètes</u>**) :

$$f(x\,;\,\theta) = (x-1)\theta^2(1-\theta)^{x-2} \text{ pour } x = 2,\ldots,\infty \quad \text{et où } \theta \in]0,\,1[.$$

a) (1 point) Montrer que $\mathbb{E}(X_i) = 2/\theta$. Dans la suite on admettra que $\mathbb{V}(X_i) = 2(1-\theta)/\theta^2$.

b) (2 points) Déterminer $\tilde{\theta}_n$ l'estimateur de la méthode des moments de θ. Trouver son comportement asymptotique.

c) (2 points) Déterminer l'estimateur de vraisemblance maximale (EVM) $\hat{\theta}_n$ de θ. Admettez qu'il s'agit bien d'un maximum.

d) (2 points) En admettant que les conditions C1 à C4 tiennent, déterminer le comportement asymptotique de l'estimateur $\hat{\theta}_n$ trouvé en *c*). Comparer avec celui de $\tilde{\theta}_n$.

~~*e*) (1 point) Si~~ $\cancel{\sum_{i=1}^{10} x_i = 8}$~~, déterminer la valeur de la statistique du test de Wald~~ $\cancel{W_n}$ ~~de~~ $\cancel{H_0: \theta = 0.6}$ ~~contre~~ $\cancel{H_1: \theta \neq 0.6}$~~. Sachant que~~ $\cancel{\chi^2_{1,0.95} = 3.84}$, $\cancel{\chi^2_{2,0.95} = 5.99}$ ~~et~~ $\cancel{\chi^2_{3,0.95} = 7.81}$~~, que peut-on conclure concernant la validité de~~ $\cancel{H_0}$ ~~au niveau~~ $\cancel{\alpha = 0.05}$ ~~?~~

<u>EXERCICE 2)</u> (12 points) Soit ($\mathcal{X}$, {$\mathbb{P}_\theta$, $\theta \in \Theta$}), le modèle statistique d'un échantillon X_1,..., X_n de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées (*iid*) issues de la densité

$$f(x\,;\,\theta) = \begin{cases} e^{-(x-\theta)} & \text{si } x \geq \theta \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \qquad \text{où } \theta \in \mathbb{R}.$$

a) (2 points) La densité $f\,(x;\,\theta)$ est-elle “à rapport de vraisemblance monotone” en fonction d'une statistique U ? Si oui, monotone croissant ou décroissant, et déterminer U ?

b) (1 point) Si $X_{(1)} = \text{Min}\{X_1,\ldots, X_n\}$, montrer que $\mathbb{P}_\theta[X_{(1)} > x] = e^{-n(x-\theta)}$ si $x > \theta$ et 1 sinon.

c) (1 point) Si $n = 20$, déterminer le test uniformément plus puissant (UPP) de niveau $\alpha = e^{-2}$ pour tester H_0: $\theta = 1$ contre H_1: $\theta > 1$.

d) (2 points) Montrer que $X_{(1)} - \theta$ est un pivot. En déduire un IC bilatéral de niveau $1 - \alpha = 0.90$ pour θ si $n = 10$ et $x_{(1)} =3$.

e) (2 points) Déterminer l'EVM de θ.

f) (2 points) Soit H_0: $\theta = 0$ et H_1^* : $\theta \neq 0$. Montrer que le test donné par

$$\varphi = \varphi(x_1, \ldots, x_n) = \begin{cases} 1 & \text{si } x_{(1)} < 0 \text{ ou} > -\log(\alpha)/n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

est de niveau α.

g) (2 points) Le test donné en *f*) est-il sans biais (SB) ? Noter que la probabilité trouvée en *b*) peut s'exprimer sous la forme : $\mathbb{P}_\theta[X_{(1)} > x] = \mathbb{I}\{ x < \theta\} + e^{-n(x-\theta)}\mathbb{I}\{ x > \theta\}$ et donc que $\mathbb{P}_\theta[X_{(1)} < x] = \mathbb{I}\{ x > \theta\} - e^{-n(x-\theta)}\mathbb{I}\{ x > \theta\}$

Bonne Chance !

Gilles Ducharme et Xavier Bry