*Master MIND et Biostat*
*Contrôle Continu*
*Statistique Inférentielle* (HMMA 102)
**23 octobre 2019 de 8h30 à 10h45**

**Éléments autorisés:** Antisèche *officielle* + calculatrice.

EXERCICE 1) (7 points) Soit $\mathcal{M}_n$, le modèle statistique d'un échantillon $X_1,\ldots,X_n$ *iid* de densité:

$$f(x\,;\,\theta) = \frac{(1-1/\theta)^{x-1}}{\theta} \text{ si } x = 1, 2, \ldots, \infty \qquad \text{où } \theta > 1.$$

*a*) (3 points) Exprimer la vraisemblance de $\mathcal{M}_n$ sous la forme d'un modèle exponentiel.
Montrer que $\mathbb{E}_\theta(X_i) = \theta$ et $\mathbb{V}_\theta(X_i) = \theta(\theta-1)$.

*b*) (1 point) Trouver une statistique exhaustive minimale complète pour $\theta$.

*c*) (2 point) Calculer l'information de Fisher $\mathcal{I}_{\mathcal{M}_n}(\theta)$ pour ce modèle (supposer que la condition d'intégrabilité sous l'intégrale d'ordre 2 tient)

*d*) (1 point) Déterminer un estimateur SBVM pour $\theta$.

EXERCICE 2) (4 points) Soit $(\mathcal{X}, \{\mathbb{P}_\theta, \theta \in \Theta\})$, le modèle statistique d'un échantillon aléatoire $X_1,\ldots,X_n$ *iid* de loi $U[\theta, 0]$ où $\theta < 0$.

a) (2 points) Déterminer le test UPP de niveau $\alpha = 0.10$ pour $\mathcal{H}_0 : \theta = -2$ contre $\mathcal{H}_1 : \theta = -3$

*b*) (2 points) Déterminer la valeur de $n$ nécessaire pour que le test UPP de l'exercice *a*) ait une puissance supérieure à 0,9.

Rappel : Si $X \sim U[\theta, 0]$, alors $Y = -X \sim U[0, |\theta|]$

EXERCICE 3) (9 points) Soit $\mathcal{M}_n$ le modèle d'échantillonnage de $n$ *v.a. iid* $X_1,\ldots,X_n$ de densité

$$f(x;\,\theta) = \frac{x}{\theta^2}\exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{\theta}\right)^2\right\} \text{ pour } x > 0 \text{ et où } \theta \in \Theta = ]0, \infty).$$

*a*) (3 *pts*) Montrer que cette loi est membre de la famille exponentielle ET que celle-ci est de plein rang. Montrer que le paramètre naturel du modèle $\mathcal{M}_n$ peut s'écrire $\alpha(\theta) = -1/(2\theta^2)$. Avec ce choix, préciser l'espace paramétrique naturel.

*b*) (2 *pts*) En admettant que l'espérance de la statistique privilégiée vaut $2n\theta^2$ et sa variance est $4n\theta^4$, Calculer l'information de Fisher pour le modèle $\mathcal{M}_n$.

*c*) (2 *pts*) Déterminer l'estimateur SBVM de $g(\theta) = \theta^2$. Calculer sa variance.

*d*) (2 *pts*) Déterminer la borne de Cramér-Rao pour le problème d'estimer sans biais $g(\theta) = \theta^2$. L'estimateur trouvé en *c*) est-il efficace ?

Gilles DUCHARME et Xavier BRY