Année 2020-2021
L3 — Mathématiques
HLMA502 Topologie

Feuille d'exercices 4

Exercice 1. Soit (X, d) un espace métrique, et soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de X. Montrer qu'il y a équivalence entre :

1. $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy ;
2. $\forall\varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \mid \forall n \geq N, d(x_n, x_N) < \varepsilon$;
3. $\sup_{k\geq n} d(x_k, x_n)$ tend vers 0 quand $n \to +\infty$.

Exercice 2. On considère $\mathbb{R}$ muni de sa distance usuelle, notée d. Soit $\phi : \mathbb{R} \to]-1, 1[$ une application continue strictement croissante telle que[1] $\lim_{x\to\pm\infty} \phi(x) = \pm 1$. On définit[2] une nouvelle distance δ sur $\mathbb{R}$ par $\delta(x, y) := |\phi(x) - \phi(y)|$.

1. Montrer que la suite $(n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy pour la distance δ.
2. L'espace métrique $(\mathbb{R}, \delta)$ est-il complet ?
3. Quelle conclusion en tirer ?

Exercice 3. On munit $X = C^0([0, 1], \mathbb{R})$ de la distance $d_1(f, g) = \int_0^1 |f(t) - g(t)|\, dt$. Pour n entier positif, on définit $f_n \in X$ par :

$$f_n(x) := \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq x \leq 1/2 \\ -nx + (n + 2)/2 & \text{si } 1/2 \leq x \leq 1/2 + 1/n \\ 0 & \text{si } 1/2 + 1/n \leq x \leq 1 \end{cases}$$

1. Tracer le graphe de f_n.
2. Montrer que $d(f_n, f_p) \leq \frac{1}{2n} - \frac{1}{2p}$ si $n \leq p$. Qu'en déduit-on sur la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$?
3. Montrer que si la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergeait vers f dans $(C^0([0, 1], \mathbb{R}), d_1)$, alors on aurait $f \equiv 1$ sur $[0, 1/2[$ et $f \equiv 0$ sur $]1/2, 1]$.
4. En déduire que (X, d_1) n'est pas complet.

1. Par exemple, on peut prendre $\phi(x) := \frac{x}{1+|x|}$.
2. Voir feuille d'exercices 3. On rappelle que d et δ sont topologiquement équivalentes.

Exercice 4. **Démonstration du théorème de complétion.** Soit (X, d) un espace métrique (non vide). On fixe un point a de X, et on définit alors, pour chaque $x \in X$, une fonction $f_x : X \to \mathbb{R}$ en posant :

$$f_x(y) := d(y, x) - d(y, a) \quad \forall y \in X.$$

1. Montrer que chaque f_x est une fonction bornée.
2. Montrer que l'application $X \to \mathcal{B}(X, \mathbb{R})$ qui à x associe f_x préserve la distance.
3. En déduire que tout espace métrique est isométrique à une partie d'un espace métrique complet.
4. En déduire que tout espace métrique est isométrique à une partie *dense* d'un espace métrique complet.
5. Montrer que le complété d'un espace métrique est unique à isométrie près.

Exercice 5. On veut montrer que l'espace de suites ℓ^1 est complet[3]. Pour cela, soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy de ℓ^1.

1. Montrer que, pour chaque $k \in \mathbb{N}$, la suite $(x_n(k))_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans $\mathbb{R}$. On note $x(k)$ sa limite, et on considère la suite $x := (x(k))_{k\in\mathbb{N}}$.
2. Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un $N \in \mathbb{N}$ tel que $\sum_{k=0}^{\infty} |x(k) - x_n(k)| \leq \varepsilon$ pour tout $n \geq N$.
3. En déduire que $x \in \ell^1$ et que $x_n \to x$ dans ℓ^1.

Exercice 6. Soit (X, d) un espace métrique dont toutes les boules fermées sont compactes.

1. Montrer que X est complet.
2. Montrer que les parties compactes de X sont les parties qui sont fermées et bornées.

Exercice 7. Soit $X = \{a, b, c\}$. Soit d la distance discrète d sur X. On définit $\delta(a, b) = \delta(b, a) = \delta(a, c) = \delta(c, a) = 2$, $\delta(b, c) = \delta(c, b) = 1$ et $\delta(a, a) = \delta(b, b) = \delta(c, c) = 0$.

1. Montrer que δ est une distance sur X, fortement équivalente à d.
2. Soit $f : X \to X$ définie par $f(a) = b$, $f(b) = c$ et $f(c) = c$. Montrer que f est une contraction pour la distance δ, mais pas pour la distance d.

Exercice 8. Montrer que le système d'équations $\begin{cases} x = \frac{1}{4}\sin(x + y) \\ y = 1 + \frac{2}{3}\arctan(x - y) \end{cases}$ admet une unique solution $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

3. On notera $x = (x(k))_{k\in\mathbb{N}}$ un élément de ℓ^1, c'est-à-dire une suite x telle que $\sum_{k=0}^{\infty} |x(k)| < +\infty$.

Exercices supplémentaires

Exercice 9. Montrer que l'espace de suites ℓ^2 est complet, par une démonstration semblable à celle pour ℓ^1.

Exercice 10. Le **théorème de Baire** affirme que, dans un espace complet, une intersection dénombrable d'ouverts denses est dense. Plus précisément : si (X, d) est un espace métrique complet non vide, et si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'ouverts de X tels que chaque A_n soit dense dans X, alors $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n \neq \emptyset$.

Pour démontrer le théorème de Baire, soient $x \in X$ et $r > 0$ quelconques.

1. Montrer que $A_0 \cap B(x, \varepsilon)$ est un ouvert non vide de X. En déduire qu'il existe un point $x_1 \in A_0$ et un rayon $r_1 < r/2$ tels que $D(x_1, r_1) \subseteq A_0 \cap B(x, r)$.
2. Justifier l'existence d'une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de points de X et d'une suite $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de rayons tels que
$$D(x_{n+1}, r_{n+1}) \subseteq A_n \cap B(x_n, r_n) \quad \text{et} \quad r_{n+1} < \frac{r_n}{2}$$
(on pose $x_0 := x$ et $r_0 := r$).
3. Montrer que $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} D(x_n, r_n)$ n'est pas vide.
4. Conclure.

Exercice 11. Soit $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fermés dans un espace métrique complet X, telle que $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n = X$. Montrer qu'il existe un $n \in \mathbb{N}$ tel que l'intérieur de F_n ne soit pas vide.

Exercice 12. Montrer que $\mathbb{Q}$ n'est pas l'intersection d'une suite dénombrable d'ouverts de $\mathbb{R}$. Pour cela, on raisonne par l'absurde en supposant que $\mathbb{Q} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n$, où chaque U_n est un ouvert de $\mathbb{R}$.

1. Montrer que chaque U_n est dense dans $\mathbb{R}$.
2. Soit $\mathbb{Q} = \{q_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ une énumération des rationnels. Montrer que $V_n := U_n \setminus \{q_n\}$ est un ouvert dense de $\mathbb{R}$.
3. Que dire de l'intersection de tous les V_n ?
4. Conclure par le théorème de Baire.

Exercice 13. Une application classique du résultat précédent est qu'il n'existe pas de fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ qui soit continue en tout rationnel et discontinue en tout irrationnel. Pour le démontrer, soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction quelconque. Pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$, on définit :

$$U_n := \{a \in \mathbb{R} \mid \exists \delta_a > 0, \forall x, y \in]a - \delta_a, a + \delta_a[\,, |f(x) - f(y)| < 1/n\}$$

1. Montrer que chaque U_n est ouvert dans $\mathbb{R}$.

2. Montrer que $\bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} U_n$ est l'ensemble des points de continuité de f.
3. Conclure

Exercice 14. Soit (X, d) un espace métrique complet, et soit $f : X \to X$ dont une certaine puissance f^p est contractante, avec $p \geq 1$. Montrer qu'alors f admet un unique point fixe.

Exercice 15. Soit (X, d) un espace métrique complet. On considère une application $f : X \to X$ telle qu'il existe un nombre $\alpha \in [0, 1/2[$ pour lequel :

$$\forall x, y \in X, \quad d(f(x)f(y)) \leq \alpha\big(d(x, f(x) + d(y, f(y))\big).$$

Montrer que f admet un unique point fixe.

Exercice 16. Le **cube de Hilbert** est l'espace $H := [0,1]^{\mathbb{N}}$ muni de la distance

$$d(x, y) := \sum_{n\geq 0} \frac{|x(n) - y(n)|}{2^n}$$

1. Montrer que d est bien une distance sur H.
2. Montrer que H est précompact.
3. Montrer que H est complet.
4. En déduire que H est compact.