$\boxed{\text{exercice 9}}$ (X,d) métrique compact $\quad X \xrightarrow{f} X$ tq $d(f(x),f(y)) < d(x,y)$ si $x \neq y$

But : mq $\exists!\, a \in X \,;\, \underbrace{f(a)=a}_{\text{a est un pt fixe}}$

1) Mq $\exists a \in X \,;\, d(a,f(a)) \leq d(x,f(x)) \ \forall x \in X \longleftarrow$ (!)

f est 1-lipschitzienne $\qquad$ k-lip : $d(f(x),f(y)) \leq k\, d(x,y) \ \forall x,y$

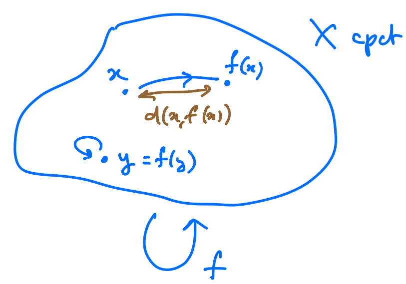
↳ $d(f(x),f(y)) \leq d(x,y) \ \forall x,y$

(!) si $\left| \begin{array}{l} d(f(x),f(y)) < d(x,y) \\ \forall x \neq y \end{array} \right.$, alors $\left| \begin{array}{l} d(f(x),f(y)) \leq d(x,y) \\ \forall x,y \end{array} \right.$ ↖ encore vrai si $x=y$

ici f est donc 1-lip, donc continue

Considérons la fonction $X \xrightarrow{g} \mathbb{R}_+$

$x \longmapsto d(x,f(x))$ $\quad = 0 \iff \boxed{x = f(x)}$



Cette fonction est continue ...

[car c'est une composée d'applications continues :

$$X \xrightarrow{C^0} X \times X \xrightarrow{d\ C^0} \mathbb{R}$$

$$x \longmapsto (\underset{\substack{\uparrow \\ C^0}}{x}, \underset{\substack{\uparrow \\ C^0}}{f(x)}) \longmapsto d(x,f(x))$$
]

... sur X compact, donc elle est minorée (on le savait déjà) et elle réalise sa borne inf : il existe un $a \in X$ tel que $g(a) = \min_{x \in X} g(x)$

c-à-d $\exists a \in X ;\ d(a,f(a)) \leq d(x,f(x)) \ \forall x \in X$

La distance est continue : "pour elle-même"

$X \times X \xrightarrow{d} \mathbb{R} \quad C^0$

$(x,y) \longmapsto d(x,y)$

$\underbrace{X \times X}_{\text{topo grossière !}} \xrightarrow{d} \mathbb{R}$ $\qquad d^{-1}(\underbrace{]0,1[}_{\text{ouv. de } \mathbb{R}}) = \emptyset$ ou $X \times X$ tout entier

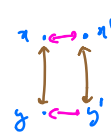
avec d_∞
ou avec d_1

$d_\infty((x,y),(x',y')) = \max(d(x,x'), d(y,y'))$

(exo) $\underbrace{|d(x,y) - d(x',y')|}$ $\leq k\, d_\infty((x,y),(x',y'))$

$\overset{?}{\leq} k\, d_1((x,y),(x',y'))$

(!)



② Mq ce point $a \in X$ est l'unique pt fixe de f

$\underbrace{\text{a est un pt fixe}}_{!}$ ⊕ $\underbrace{\text{c'est le seul}}_{?}$

hyp : $d(f(x), f(y)) < d(x,y)$ $\forall x \neq y$

si $x = f(x)$ et $y = f(y)$ avec $x \neq y$ (!)

alors :

$\underbrace{d(\underbrace{f(x)}_{x}, \underbrace{f(y)}_{y}) < d(x,y)}_{\text{faux, une contradiction}}$ ← $\big[d(x,y) < d(x,y)\big]$

donc f a au plus un pt fixe

le pt $a \in X$ vérifie :

$$d(a, f(a)) \leq d(x, f(x)) \quad \forall x \in X$$

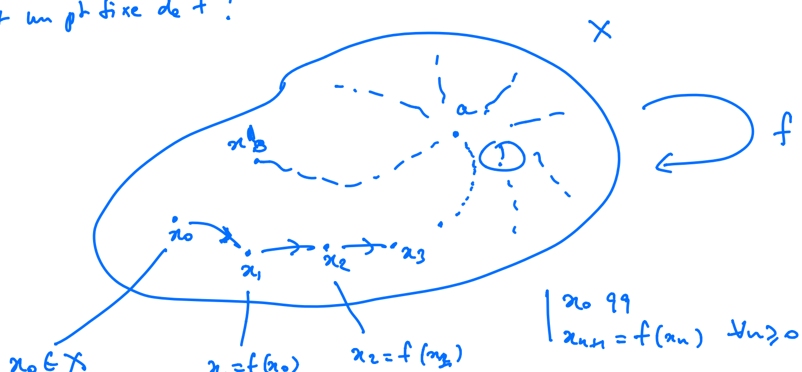
par l'absurde ? (on veut mq $f(a) = a$ ...)

si $a \neq f(a)$ alors $d(\underbrace{f(a)}_{\substack{\text{un certain} \\ x \in X}}, f(\underbrace{f(a)}_{x \in X})) < d(a, f(a)) \underset{\text{par ①}}{\leq} d(f(a), f(f(a)))$

contrad

Donc $a = f(a)$

↑ a est un pt fixe de f !



x_0 qq

$x_{n+1} = f(x_n)$ $\forall n \geq 0$

(!) $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} a$

exercice 10 (X,d)

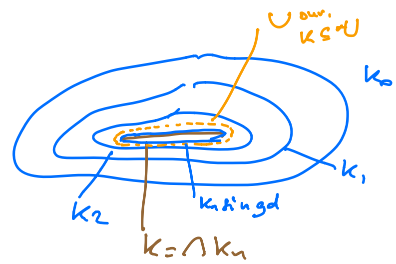
(K_n) suite $\downarrow$ de parties cpcts non vides

① pourquoi $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} K_n \neq \emptyset$?

cpct $\Rightarrow$ fermé

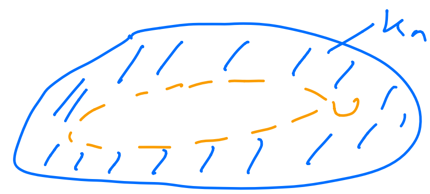
une intersection décroissante de fermés non vides est non vide

(!) tout est contenu dans le compact K_0



② Soit U un voisinage ouvert de $K := \bigcap_{n\in\mathbb{N}} K_n$ (dans X)

(= un ouvert de X contenant K)



Tout se passe dans le compact K_0

que penser de $K_n - U$?

$$K_0 - \left(\bigcap K_n\right) \overset{?\,\text{ok}}{=} \bigcup \underbrace{(K_0 - K_n)}_{\text{ni ouvert, ni fermé}} \text{ possible}$$

$\underbrace{K_n - U \text{ est... fermé}}_{\text{et même cpct!}}$: c'est $K_n \cap (X - U)$

(!) on veut mq $K_n \subseteq U$ si $n >> 0$

$\Leftrightarrow$ mq $K_n - U = \emptyset$ si $n >> 0$

$$\underbrace{\bigcap_{n\in\mathbb{N}} (K_n - U)}_{\text{une intersec° } \downarrow \text{ (car les } K_n \text{ sont } \downarrow) \text{ de fermés ds le cpct } K_0} \overset{?}{=} \emptyset$$

(!) car $x \in \bigcap (K_n - U)$ $\Leftrightarrow$ $x \in \bigcap K_n$ et $x \notin U$; $K \subseteq U$

donc : $\exists N$ tq $K_N - U = \emptyset$

$\Updownarrow$

$K_N \subseteq U$

$\boxed{\text{exercice 8}}$ (X,d) compact

Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de pts de X n'ayant qu'une seule valeur d'adhérence ℓ.

Alors $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge !

ℓ va + $x_n \not\to \ell$ $\Rightarrow$ $\exists$ autre va

Supposons $x_n \not\to \ell$

$n = \phi(0)+1$ $\qquad$ $\phi(1) \geq \phi(0)+1$

soit $\varepsilon>0$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $N \geq n$ tq $d(x_N,\ell) \geq \varepsilon$

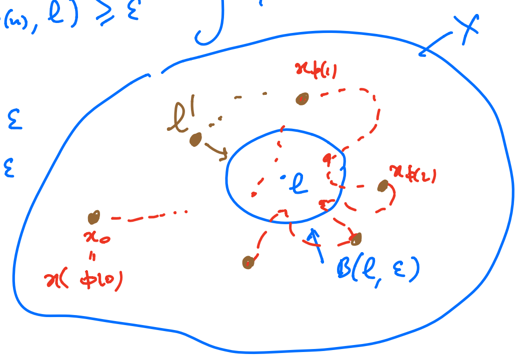
d'où une suite extraite $(x_{\phi(n)})$ extraite de (x_n)

de sorte que $\forall n \geq 1$ ... $d(x_{\phi(n)},\ell) \geq \varepsilon$

0 !

0) $\exists\, \phi(0) \in \mathbb{N}$ tq $d(x_{\phi(0)},\ell) \geq \varepsilon$

1) $\exists\, \phi(1) > \phi(0)$ tq $d(x_{\phi(1)},\ell) \geq \varepsilon$



On obtient une suite $(x_{\phi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$

du cpct X

Elle admet une ss-suite qui cv

$\to$ une sous-suite de (x_n) qui converge ... vers un $\ell' \in X$

à la limite : $\underbrace{d(x_{\phi(\psi(n))},\ell)}_{\geq\varepsilon} \longrightarrow \underbrace{d(\ell',\ell) \geq \varepsilon > 0}_{\text{donc } \ell' \neq \ell}$

$\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$

Contrex si X pas cpct :