$\boxed{\text{exercice 11}}$ thm de Dini

(X,d) compact $f_n : X \to \mathbb{R}$ C^0

On suppose que la <u>suite</u> $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est <u>monotone</u>, disons <u>croissante</u>

et que $f_n \xrightarrow[n\infty]{} f$ simplement vers f également continue

Alors la cv est <u>uniforme</u>.

<u>idées</u>? F_n un fermé de X

→ soit $\varepsilon > 0$ pour $n \in \mathbb{N}$: $F_n = \{ x \in X ; \overline{|f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon} \}$

que peut-on dire de F_n ? F_n est-il fermé ?

Oui : f_n et f sont continues

donc $X \xrightarrow{\phi_n} \mathbb{R}$ est continue

$x \longmapsto |f_n(x) - f(x)|$

$\underbrace{F_n = \underset{C^0}{\phi_n^{-1}} (\underbrace{[\varepsilon, +\infty[}_{\text{un fermé de } \mathbb{R}})}_{\text{un fermé de } X}$

$F_n = \phi$ à partir d'un certain rang ?

par convergence, on le sait

CVS : $\forall x$ donné, $\exists N_x$ rang ; $\forall n \geq N$, $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$

donc : $x \notin F_n$ si $n \geq N_x$

cela prouve-t-il que $F_n = \phi$?

tout simplement : $x \notin F_{N_x}$ ... donc $F_{N_x} = \phi$? NON : rien (pour le moment)

ne dit que N pourra être le même

pour <u>tous</u> les $x \in X$!

Que veut-on montrer sur les F_n ?

Comment la CVU s'exprime-t-elle ??

On veut : $\underbrace{\exists N \in \mathbb{N} ; \forall n \geq N, \ \forall x \in X \ |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon}$

$\Leftrightarrow$ F_n est ... vide !

donc montrer la CVU

revient à mq $F_n = \phi$

à partir d'un certain rg

$(\Leftrightarrow X - F_n = X$ APCR$)$

$f_n : X \to \mathbb{R}$

$f : X \to \mathbb{R}$

$f_n \uparrow f$ cvs donc $f_n(x) \leq f_{n+1}(x) \leq f(x) = \lim_{n\infty} f_n(x)$

$\forall x \in X$

$\varepsilon > 0$ fixé

$F_n = \{ x \in X ; |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon \}$

$= \{ x \in X ; f(x) - f_n(x) \geq \varepsilon \}$ est un fermé de X

la cvs dit que ... ? que $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n = \phi$?

$x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}$, $\underbrace{f(x) - f_n(x)}_{\text{or ceci tend vers } 0 \text{ qd } n \to +\infty \text{ (CVS)}} \geq \varepsilon$

donc $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n = \phi$ ...

Or X est compact ...

donc il existe $n_1, \cdots, n_k \in \mathbb{N}$ (nbre fini d'entiers)

tels que $F_{n_1} \cap F_{n_2} \cap \cdots \cap F_{n_k} = \phi$

Qu'implique la monotonie (croissante) de la suite ?

$f_1(x) \leq \cdots \ f_n(x) \leq f_{n+1}(x) \leq \cdots \leq f(x)$

$U_n := X - F_n$ ouvert de X

$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} U_n = X$ tout entier

Or X est cpct...

donc de ce recouvrt ouvert

on peut extraire un ss. rec. fini

$U_n \subseteq U_{n+1}$ (!)

donc $\exists N ; U_N = X$

$F_{n+1} \subseteq F_n$: $\left[\begin{array}{l} x \in F_{n+1} \Leftrightarrow f(x) - f_{n+1}(x) \geq \varepsilon \iff f(x) \geq \varepsilon + f_{n+1}(x) \geq \varepsilon + f_n(x) \\ \Rightarrow f(x) - f_n(x) \geq \varepsilon \\ \Rightarrow x \in F_n \end{array} \right.$

On a donc une suite décroissante de fermés F_n dont l'intersec° est vide ...

de X compact

donc $\exists N \in \mathbb{N}$; $F_N = \emptyset$

$\forall n \geq N$, $F_n = \emptyset$

donc $f_n \longrightarrow f$ uniformément !

si $n_1 \leq n_2 \leq \dots \leq n_k$

alors $\underbrace{F_{n_1} \cap F_{n_2} \cap \dots \cap F_{n_k}}_{\emptyset} = \underbrace{F_{n_k}}_{\emptyset}$

Et si la suite (f_n) était décroissante ? (!) $\longrightarrow$ considérer $-f_n = g_n$

$\underset{\lim_{n\infty} f_n(x)}{f(x)} \leq \dots \leq f_{n+1}(x) \leq f_n(x) \leq \dots \leq f_1(x)$

$F_n = \{ x \in X ; \ | f_n(x) - f(x) | \geq \varepsilon \}$

$= \{ x \in X ; \ \underbrace{f_n(x) - f(x)}_{\text{tjs} \geq 0} \geq \varepsilon \}$

$F_{n+1} \subseteq F_n$? Oui !

$x \in F_{n+1}$

$\Rightarrow f_{n+1}(x) \geq \varepsilon + f(x)$

$\Rightarrow f_n(x) \geq f_{n+1}(x) \geq \varepsilon + f(x)$

$\Rightarrow f_n(x) - f(x) \geq \varepsilon$

$\Rightarrow x \in F_n$

exercice 15 (?)

Dans $\mathbb{R}^n$ usuel

$A, B \subseteq \mathbb{R}^n$

$A + B = \{ a + b ; \ a \in A, b \in B \}$

$= \{ x \in \mathbb{R}^n ; \ \exists a \in A, \exists b \in B, \ x = a + b \}$

$\mathbb{R}^n$ est un espace vectoriel

$\boxed{A, B \text{ compacts} \Rightarrow A + B \text{ compacte}}$

énoncé topologique (!)

pour le montrer, on peut envisager de se servir d'une distance d ← qui donne la topo usuelle

et donc de raisonner dans un espace métrique $(\mathbb{R}^n, d)$

ok

On munit $\mathbb{R}^n$ de la distance d

(elle donne la topologie usuelle).

Alors les cpcts de $\mathbb{R}^n$ sont les parties fermées et bornées ? pour d

d est importante ? OUI

est-ce que toutes les distances qui donnent la topo usuelle sont fortement équivalentes ? NON

(!) d distance qq sur X

$\delta = \min(1, d)$ aussi distance sur X, topo^t équiv à d

$\operatorname{diam}_\delta(X) \leq 1$ $\qquad \delta(x,y) \leq 1 \quad \forall x, y \in X$

compacité séquentielle pour mq $A+B$ cpcte (A, B étant cpcts)

Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $A+B$

Pour chaque n : on choisit $a_n \in A$, $b_n \in B$ tq $x_n = a_n + b_n$

Comme A est compacte :

il existe $(a_{\phi(n)})$ une sous-suite cv de (a_n) vers un élt $a \in A$

et alors il existe ψ tq $(a_{\phi(\psi(n))})$ et $(b_{\phi(\psi(n))})$ convergent (ds A, ds B)

comme B cpcte — extractrice

d'où c'est fini : $x_{\phi(\psi(n))} = \underbrace{a_{\phi(\psi(n))}}_{\text{cv}} + \underbrace{b_{\phi(\psi(n))}}_{\text{cv}}$ ($a \in A$, $b \in B$)

donc cv vers $a+b \in A+B$

Ainsi une sous-suite de (x_n) est convergente (dans $A+B$)

Donc $A+B$ est compacte

$\mathbb{R}$

$[0,1[$ pas cpcte

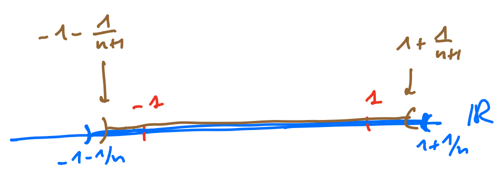
mais : tte suite de pts de $[0,1[$ admet une ss-suite cv (ds $\mathbb{R}$)

$K_n \downarrow$, $\neq \emptyset$

$\bigcap K_n = K \subseteq U$

cpct — ouvert

si U ne contient aucun des K_n



$K_n =]-1-\frac{1}{n}, 1+\frac{1}{n}[$

$\bigcap K_n =]-1, 1[$

$U =]-1,1[$ est un ouvert

mais il ne contient aucun des K_n ...