⚠ (X,d) métrique

compact $\Rightarrow$ complet

complet $\not\Rightarrow$ compact ($\mathbb{R}$)

complet + ? $\Rightarrow$ compact   thm : complet + précompact $\Rightarrow$ compact

complet + borné $\overset{?}{\Rightarrow}$ compact (NON !?)

X ensemble infini + d discrète } mais pas compact

$\uparrow \mathbb{N}$ $\hookrightarrow$ complet borné $X = \bigcup_{x\in X}\{x\}$

thm : $(\mathcal{B}(X,\mathbb{R}), d_\infty)$ est complet

$\uparrow$ ens. qq

complet!

dém : Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy de $f_n : X \to \mathbb{R}$ bornée

1) Convergence simple : pour chaque $x \in X$, la suite $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans $\mathbb{R}$

2) notation : $f_n(x) \xrightarrow[n\infty]{} f(x)$ d'où $f : X \to \mathbb{R}$

$x \mapsto f(x) = \lim_{n\infty} f_n(x)$

⚠ mq f est bornée (donc $f \in \mathcal{B}(X,\mathbb{R})$)

et $f_n \xrightarrow[n\infty]{} f$ au sens de d_∞ c-à-d $d_\infty(f_n,f) \xrightarrow[n\infty]{} 0$

3) Soit $\varepsilon > 0$.

On choisit un $N\in\mathbb{N}$ tq $\forall n,p \geq N$, $d_\infty(f_n,f_p) < \varepsilon$

donc : $\forall n \geq N, \forall p \geq N, \forall x \in X, \ |f_n(x) - f_p(x)| < \varepsilon$

$\forall n \geq N, \forall x \in X, \forall p \geq N, \ |f_n(x) - f_p(x)| < \varepsilon$

$f_p(x) \xrightarrow[p\infty]{} f(x)$

n et x fixés, $p \to +\infty$) donne :

$\forall n \geq N, \forall x \in X, \ |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$

c-à-d $\forall n \geq N, \ \sup_{x\in X} |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$

donc $f_n - f$ est bornée sur X (pour $n \geq N$)

p.ex. $f_N - f$ bornée

et donc $f = \underbrace{f - f_N}_{\text{bornée}} + \underbrace{f_N}_{\text{bornée}}$ est une fonction bornée !

mieux : f est bornée et si $n \geq N$ alors $\|f_n - f\|_\infty = d_\infty(f_n,f) \leq \varepsilon$

On a donc trouvé : $f \in \mathcal{B}(X,\mathbb{R})$ tq $f_n \to f$ dans $(\mathcal{B}(X,\mathbb{R}), d_\infty)$

▨

$11 \overset{\text{topo}}{\text{———}} 15$

$10 \overset{\text{top}}{\text{———}} 20$

??

01

$(\mathcal{B}(X,\mathbb{R}), d_\infty)$ est un espace métrique complet...

donc tout fermé de cet espace sera également complet (pour la distance induite)

cas part. important : (!)

si (X,d) est un espace métrique compact

alors $C^0(X,\mathbb{R}) \subseteq \mathcal{B}(X,\mathbb{R})$

Prop : $C^0(X,\mathbb{R})$ est fermé dans $\mathcal{B}(X,\mathbb{R})$

X espace mét. cpct

cpct (!)

Cor : $(C^0(X,\mathbb{R}), d_\infty)$ est complet

dém : Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $C^0(X,\mathbb{R})$ tq $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{} f$ dans $\mathcal{B}(X,\mathbb{R})$ pour d_∞

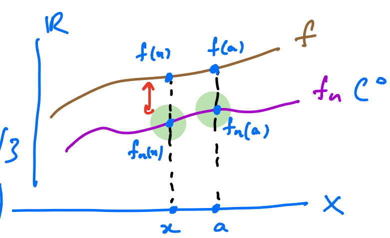
Il s'agit de mq $f \in C^0(X,\mathbb{R})$ "une limite uniforme de fonctions continues est continue"

Soit $a \in X$, soit $\varepsilon > 0$

Soit $N \in \mathbb{N}$ tq $\forall n \geq N, \forall x \in X, |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon/3$

De plus f_N est C^0 en a donc $\exists \delta > 0$ tq $d(x,a) < \delta$

$\Rightarrow |f_N(x) - f(a)| < \varepsilon/3$



$n = N$

$d(x,a) < \delta$

$$|f(x) - f(a)| = |f(x) - f_N(x) + f_N(x) - f_N(a) + f_N(a) - f(a)|$$

$$\leq \underbrace{|f(x) - f_N(x)|}_{<\varepsilon/3} + \underbrace{|f_N(x) - f_N(a)|}_{<\varepsilon/3} + \underbrace{|f_N(a) - f(a)|}_{<\varepsilon/3} < \varepsilon$$

Ainsi : $\underbrace{\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 ; \forall x \in X, d(x,a) < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon}_{f \text{ est } C^0 \text{ en } a}$ (qq soit $a \in X$...)

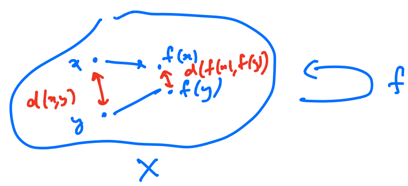
Thm du point fixe de Banach ⚠ → S6 Calcul Diff & Equa Diff

thm de Cauchy-Lipschitz (existence et unicité des sol. d'une équa diff)

(X,d) métrique

$X \xrightarrow{f} X$

f contractante : $\exists k \in [0,1[$; $\forall x \in X, \forall y \in X$, $d(f(x),f(y)) \leq k\, d(x,y)$



Thm Soit (X,d) espace métrique complet.

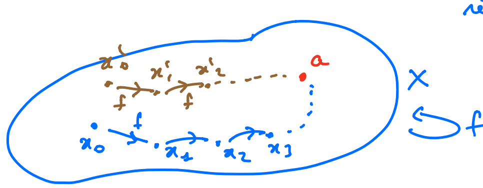
Toute $f : X \to X$ contractante admet un unique point fixe : $\exists!\, a \in X$; $f(a) = a$

dém unicité si $\begin{cases} f(a) = a \\ f(b) = b \end{cases}$ alors $d(f(a),f(b)) \leq k\, d(a,b)$

$0 \leq d(a,b) \leq k\, d(a,b)$ donc $d(a,b) = 0$

k : réel $\in [0,1[$ donc $a = b$

existence



soit $x_0 \in X$ quelconque $x_1 := f(x_0)$ $x_2 := f(x_1)$

etc... $x_{n+1} := f(x_n)$

On va montrer que la suite (x_n) cv dans (X,d) vers un $a \in X$

et que $f(a) = a$ ↑ on va mq elle est de Cauchy

distance entre deux pts successifs de la suite (x_n) :

$d(x_n,x_{n+1}) = d(f(x_{n-1}),f(x_n)) \leq k\, d(x_{n-1},x_n) \leq \overbrace{k\,k}^{k^2}\, d(x_{n-2},x_{n-1})$

$\leq \ldots \leq ?\; d(x_1,x_0)$

d'où (récurrence) :

$$d(x_n,x_{n+1}) \leq k^n\, d(x_1,x_0)$$

⚠ dans $\mathbb{R}$

$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n} = +\infty$

$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \longrightarrow +\infty$

$S_{n+1} - S_n = \frac{1}{n+1} \xrightarrow[n\infty]{} 0$

distance entre deux pts qq x_n et x_{n+p} $p \geq 1$

$d(x_n,x_{n+p}) \leq d(x_n,x_{n+1}) + d(x_{n+1},x_{n+2}) + \cdots + d(x_{n+p-1},x_{n+p})$

$\leq k^n d(x_1,x_0) + k^{n+1} d(x_1,x_0) + k^{n+2} d(x_1,x_0) + \cdots + k^{n+p-1} d(x_1,x_0)$

$= \underbrace{d(x_1,x_0)}_{\text{une cte}} \left[k^n + k^{n+1} + \cdots + k^{n+p-1} \right]$

$= d(x_1,x_0)\, k^n \left(1 + k + \cdots + k^{p-1} \right)$

$= d(x_1,x_0)\, k^n \dfrac{1-k^p}{1-k}$ ⚠ $0 \leq k < 1$

$\leq d(x_1,x_0) \dfrac{k^n}{1-k} = \underbrace{\dfrac{d(x_1,x_0)}{1-k}}_{\text{cte}} k^n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ ⚠ $0 \leq k < 1$

donc : $\forall \varepsilon > 0,\ \exists N;\ \forall n \geq N,\ \forall p \geq 0,\ d(x_n, x_{n+p}) < \varepsilon$

$\forall n,p \geq N$ ...

$\forall n \geq N$, $\forall k \geq 0$, $k \geq 1$ " $p = n+k$

c.à.d $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy !

Or (X,d) est complet... donc la suite converge

il existe $a \in X$ tel que $x_n \xrightarrow[n\infty]{} a$

⚠ $x_n \xrightarrow[n\infty]{} a \longrightarrow$ donc $f(x_n) \xrightarrow[n\infty]{} f(a)$ car f est continue (car k-lip !)

$\left.\begin{array}{l} x_{n+1} \xrightarrow[n\infty]{} a \\ \quad\parallel \\ f(x_n) \xrightarrow[n\infty]{} f(a) \end{array}\right\}$ donc $a = f(a)$ par unicité de la limite (espace métrique !)

<u>Exemple</u> résol. d'une éq. intégrale

$u : [0,1) \to \mathbb{R}$ C^0 fixée

⚠ $\exists !\, f : [0,1) \to \mathbb{R}$ C^0 telle que $f(x) = u(x) + \frac{1}{2}\int_0^1 \sin(tx) f(t)\,dt \quad \forall x \in [0,1)$

On voit ça comme un pb de pt fixe...

$C^0([0,1),\mathbb{R}) \xrightarrow{\Phi} C^0([0,1),\mathbb{R})$

$f \longmapsto \Phi(f)$ $\quad \Phi(f)(x) := \underbrace{u(x) + \frac{1}{2}\int_0^1 \sin(tx) f(t)\,dt}_{C^0 \text{ en } x}$

On veut mq $\exists !\, f \in C^0([0,1),\mathbb{R})$ tq $\Phi(f) = f$ ⚠

⚠ $(C^0([0,1),\mathbb{R}), d_\infty)$ est <u>complet</u> $\quad \Phi(g)(x) = u(x) + \frac{1}{2}\int_0^1 \sin(tx) g(t)\,dt$

Φ est contractante ? $f,g : [0,1) \to \mathbb{R}$ C^0

$d_\infty(\Phi(f),\Phi(g)) = \|\Phi(f) - \Phi(g)\|_\infty = \sup_{x\in X} |\Phi(f)(x) - \Phi(g)(x)| = \sup_{x\in X} \left| \frac{1}{2}\int_0^1 \sin(tx) f(t)\,dt - \frac{1}{2}\int_0^1 \sin(tx) g(t)\,dt \right|$

$= \sup_{x\in X} \frac{1}{2} \left| \int_0^1 \sin(tx)\left(f(t) - g(t)\right) dt \right|$

$\leq \sup_{x\in X} \frac{1}{2} \int_0^1 |\sin(tx)| . \underbrace{|f(t) - g(t)|}_{\leq \|f-g\|_\infty = d_\infty(f,g)} dt \leq \frac{1}{2} \int_0^1 |\sin(tx)|\, \underbrace{\|f-g\|_\infty}_{\text{cte}}\, dt$

⋮

$$\leq \frac{1}{2} d_\infty(f,g)$$

Φ est $\frac{1}{2}$-lipschitzienne
donc contractante $\longrightarrow \exists !$ pt fixe

$$\leq \frac{1}{2} \|f-g\|_\infty \underbrace{\int_0 |\sin(tx)|\,dt}_{\leq 1}$$

$$\leq \frac{1}{2} \|f-g\|_\infty$$