Année 2020-2021 HLMA502 Topologie

L3 — Mathématiques

exercices à rédiger (19 novembre 2020)

N.B. La qualité de la rédaction et de la présentation sera prise en compte dans la notation. Les exercices sont indépendants et peuvent être traités dans n'importe quel ordre. N'oubliez pas de voir qu'il y a une deuxième page !

Exercice 1. On se place dans $\mathbb{R}^2$ avec la distance euclidienne notée d. Soit $a \in \mathbb{R}^2$ un point fixé. Pour $x, y \in X$, on définit :

$$\delta(x,y) := \begin{cases} d(x,a) + d(a,y) & \text{si } x \neq y \\ 0 & \text{si } x = y \end{cases}$$

1. Montrer que δ est une distance sur $\mathbb{R}^2$.
2. Prenez le temps de réfléchir aux questions suivantes, qui vont vous aider dans la suite :
   — à quoi ressemblent les δ-boules ouvertes de centre a ? quelles sont les suites de points qui convergent vers a au sens de δ ?
   — si $x \neq a$, à quoi ressemblent les δ-boules ouvertes de centre x ? quelles sont les suites de points qui convergent vers x au sens de δ ?

   Vous pouvez faire des dessins pour illustrer vos réponses (par ailleurs argumentées).
3. Soit A une partie de $\mathbb{R}^2$.
   a) Montrer que si $a \notin A$ alors A est ouvert dans $(\mathbb{R}^2, \delta)$.
   b) Montrer que si $a \in A$, alors A est ouvert dans $(\mathbb{R}^2, \delta)$ si et seulement si A est un voisinage de a pour la distance d.
4. Soient (X, d_X) un autre espace métrique et $f : \mathbb{R}^2 \to X$ une application.
   a) Montrer que $f : (\mathbb{R}^2, \delta) \to (X, d_X)$ est continue en tout point x différent de a.
   b) Montrer que $f : (\mathbb{R}^2, \delta) \to (X, d_X)$ est continue en a si et seulement si $f : (\mathbb{R}^2, d) \to (X, d_X)$ est continue en a.
5. L'espace métrique $(\mathbb{R}^2, \delta)$ est-il compact ? La δ-boule fermée de centre a et de rayon 1 est-elle une partie compacte de $(\mathbb{R}^2, \delta)$?

Exercice 2. On considère un espace topologique $(X, \mathcal{O})$ et une partie $A \subseteq X$. On munit A de la topologie induite. Si B est une partie de A, on note $\mathring{B}$ l'intérieur de B dans X, et B^* l'intérieur de B dans A.

1. Montrer que $\mathring{B} \subseteq B^*$. Donner un exemple avec une inclusion stricte.
2. On suppose que A est un ouvert de X. Montrer qu'alors $B^* = \mathring{B}$ pour toute partie B de A.

3. Réciproquement, montrer que si $B^* = \mathring{B}$ pour toute partie $B \subseteq A$, alors A est un ouvert de X.

Exercice 3. Soit (X, d) un espace métrique. On considère une application $f : X \to X$ telle que $d(f(x), f(y)) = d(x, y)$ quels que soient $x, y \in X$.

1. Montrer que f est injective et continue. Donner un exemple où f n'est pas bijective.
2. On suppose maintenant que (X, d) est **compact**. Supposons que f ne soit pas surjective, et considérons un point $a \in X$ tel que $a \notin f(X)$. On définit une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de points de X en posant $x_0 := a$ et $x_{n+1} := f(x_n)$ pour $n \geq 0$.
   a) Montrer qu'il existe un réel $r > 0$ tel que $f(X) \cap B(a, r) = \emptyset$.
   b) Montrer que $d(a, x_n) \geq r$ pour tout $n \geq 1$.
   c) En déduire que $d(x_n, x_p) \geq r$ quels que soient $n, p \geq 0$ distincts.
   d) Quelle contradiction obtient-on ? Que peut-on en déduire sur f ?