1 population

discret

suite de temps

$n = 0, 1, 2, 3, \dots$

une suite de nbrs $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ← p_n = nbre d'individus au temps n

relation de récurrence

$p_{n+1} = p_n + \underbrace{f(p_n)}_{\text{fonction accroisst}}$

$= F(p_n)$

+ CI p_0

↔

continu

temps mesuré de manière "continue"

par t réel $\geqslant 0$ $\quad t \in [0, +\infty[$

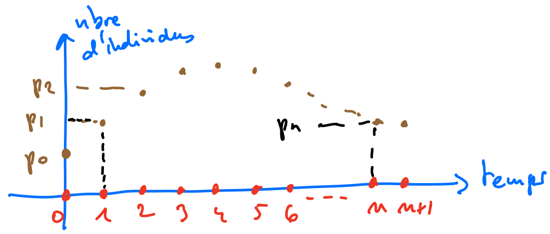
$p(t)$ = "nbre" d'individus au temps t

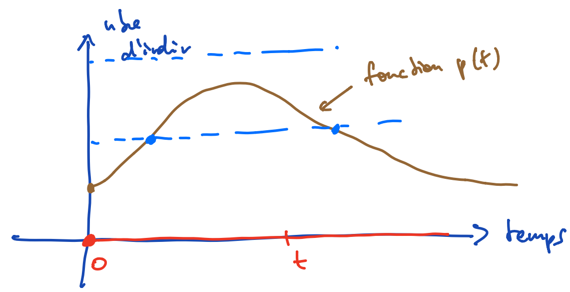
→ une fonction $p : [0, +\infty[\to \mathbb{R}_+$, $t \mapsto p(t)$ (pas un entier en g^al^)

vérifiant une

équation différentielle

$p'(t) = f(p(t))$ $\quad$ où f est une fonction





le cas continu vu comme cas limite du cas discret

discret : Δt int. de tps $\quad 0, \Delta t, 2\Delta t, 3\Delta t, \dots, n\Delta t, (n+1)\Delta t, \dots$

supp. que entre t et $t + \Delta t$

$$(*) \quad p(t+\Delta t) = p(t) + \underbrace{f(p(t))\,\Delta t}$$

l'acc. entre t et $t+\Delta t$ est prop. à Δt avec un coeff. de proportionnalité qui dépend de $p(t)$

$$(*) \iff \underbrace{\frac{p(t+\Delta t) - p(t)}{\Delta t}}_{\substack{\text{un taux d'acc.} \\ \text{(de } p(t) \text{ entre } t \text{ et } t+\Delta t)}} = f(p(t))$$

si $\Delta t \to 0$ ... à la limite $\quad p'(t) = f(p(t))$ $\quad$ une équa diff en $p(t)$ (!)

$$p'(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{p(t+\Delta t) - p(t)}{\Delta t}$$

Ainsi : $p(t)$ est solution d'une équa diff

fonction de t

$p'(t) = f(p(t))$ — donnée du modèle

$p(t) = ??$ la fonction inconnue

équa diff ordinaire d'ordre 1

EDO

discret : $p_{n+1} = F(p_n)$ — donnée du modèle

$(p_n) = ??$

Une <u>équa diff</u> = une <u>équation</u> dont l'inconnue est une <u>fonction</u>, et dans <u>laquelle</u> cette fonction inconnue $y(t)$ apparaît avec certaines de ses <u>dérivées</u>

t = paramètre de la fonction (tps)

$y(t)$ = la fonction inconnue

<u>p.ex</u> :

EDO d'ordre 1 :

$y'(t) = y(t) \longrightarrow$ p.ex $y(t) = e^t$

$y'(t) = 1 \longrightarrow$ p.ex. $y(t) = t$

$\boxed{y'(t) = 2y(t) + 1} \longrightarrow ??$

$y_1(t) = y'(t)$

$\boxed{y(t) = t^2 + t \ ??}$

pas une sol.

EDO d'ordre 2 :

$y''(t) + y(t) = 0 \longrightarrow$ p.ex $y(t) = \cos t$, sint

$y''(t) = -y(t)$

éq du 2^d d°

$x^2 - 4 = 0$

$\underbrace{x ??}_{x = 2}$

$y' = 2t + 1$ $\forall t$

$= ?$

$2y + 1 = 2t^2 + 2t + 1$

non

ordre 2 $\quad y''(t) + 2y'(t) - y(t) = 0$

$y''(t) + y(t) = 1y'' + 0y' + 1y$

<u>solutions</u>

$y(t) = Ce^{2t} + \left(-\frac{1}{2}\right) = \underbrace{Ce^{2t}} - \underbrace{\frac{1}{2}}$ ✗

(avec C = cte qq)

$\oplus$ ci $y(0) = 1$

$y(t) = Ce^{2t} - \frac{1}{2}$

cte qq

$y(0) = Ce^0 - \frac{1}{2}$

$= C - \frac{1}{2} = 1$

$C = \frac{3}{2}$

↳ une unique solution

$y(t) = \frac{3}{2}e^{2t} - \frac{1}{2}$

<u>cas discret</u> : $p_{n+1} = F(p_n)$ $\forall n = 0, 1, 2, \dots$

$p_0 \to p_1 \to p_2 \to p_3 \to \dots$

??

$\begin{cases} p_{n+1} = F(p_n) \\ p_0 = 1 \end{cases}$

<u>cas continu</u> :

$\begin{cases} y'(t) = f(y(t)) & (\forall t) \\ y(0) = y_0 \text{ donnée } (> 0) \end{cases}$

tps initial

un pb de Cauchy

$\begin{cases} y''(t) + y(t) = 0 & (\forall t) \\ y(0) = \text{position initiale} \\ y'(0) = \text{vitesse initiale} \end{cases}$

pb de Cauchy pour une EDO d'ordre 2

<u>Rem</u> <u>nous</u> : $y'(t) = f(y(t))$

f = fonction de y

AUTONOME

$\oplus$ général : $y'(t) = f(t, y(t))$ NON-AUTONOME

$f = f(t, y)$ fonction de 2 para.

Retour au pb général

$$\begin{cases} y'(t) = f(y(t)) \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

une solution à ce pb
= une fonction $y(t)$ définie sur un intervalle
↑ à préciser explicitement

p.ex: $\begin{cases} y'(t) = 2y(t) + 1 \\ y(0) = 1 \end{cases}$

↳ une unique solution $y(t) = \frac{3}{2}e^{2t} - \frac{1}{2}$ définie sur $\mathbb{R}$ ($\mathbb{R}_+$)

(!) on cherche évidemment à trouver les sol. sur le + gd intervalle possible
(solutions maximales)

p.ex. " $\underbrace{\frac{3}{2}e^{2t} - \frac{1}{2} \text{ est sol. sur } [0,1]}_{\text{pas une sol. max !}}$ "

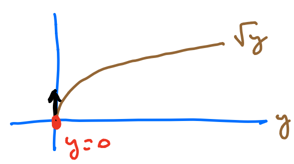
Théorème de Cauchy-Lipschitz : pb de Cauchy $\begin{cases} y'(t) = f(y(t)) \\ y(0) = y_0 \end{cases}$

Si la fonction $f = f(y)$ est C^1 (= dérivable 1 fois et de dérivée continue)
alors le pb de Cauchy admet une unique solution

ex

$y'(t) = \sqrt{y(t)}$ $\quad f(y) = \sqrt{y}$

$y' = f(y)$



$\sqrt{y}$ pas dérivable en 0

$\sqrt{0} = 0$
($\sqrt{y}$ continue en 0)

$y(t) = t^{3/2}$? $\quad y'(t) = \frac{3}{2}t^{\frac{3}{2}-1} = \frac{3}{2}t^{\frac{1}{2}} = \cancel{\frac{3}{2}\sqrt{t}}$

$y'(t) \overset{?}{=} \sqrt{y(t)}$ NON ...

$y'(t) = \frac{dy}{dt} = \sqrt{y(t)}$

$\frac{dy}{\sqrt{y}} = dt \longrightarrow \underbrace{\int \frac{dy}{\sqrt{y}}} = \underbrace{\int 1 dt}$

$2\sqrt{y} = t$

$\sqrt{y} = \frac{t}{2}$

$y(t) = \frac{t^2}{4}$

$y' = \sqrt{y}$

$\frac{d}{dt}\left(\frac{t^2}{4}\right) = \frac{2t}{4} = \frac{t}{2}$

$\sqrt{\frac{t^2}{4}} = \frac{t}{2}$

le pb de Cauchy
$\begin{cases} y'(t) = \sqrt{y(t)} \\ y(0) = 0 \end{cases}$

a 2 sol (au moins) $\begin{cases} y(t) = \frac{t^2}{4} \\ y(t) \equiv 0 \end{cases}$

EDO linéaires d'ordre 1 — les plus simples des EDO !

$$(E) \quad y'(t) = a(t)\, y(t) + b(t)$$

y : fonction inconnue

a, b : données de l'éq : des fonctions $a(t)$, $b(t)$ qui peuvent être cts

ex : $y'(t) = 2y(t) + 1$ ($a(t) = 2$, $b(t) = 1$)

$y'(t) = t\, y(t) + 3$ ($a(t) = t$, $b(t) = 3$)

$y'(t) = (\cos t)\, y(t) + e^t$

mais : $y'(t) = \sqrt{y(t)}$ cette équa diff n'est pas linéaire

$y'(t) = \underbrace{y(t)^2}_{y(t)\, y(t)}$ non plus

Lire poly p. 36 (primitives)

Résolution d'une EDO linéaire d'ordre 1

pb de Cauchy $\begin{cases} (E) \quad y'(t) = a(t)\, y(t) + b(t) & \leftarrow \text{le 2d membre} \\ y(0) = y_0 \quad \text{c.i.} \end{cases}$

$y'(t) - a(t)\, y(t) = b(t)$

① Résoudre l'équation homogène (H) associée à (E)

$(H) \quad y'(t) = a(t)\, y(t)$

→ une infinité de solutions

$y_H(t) = C\, e^{A(t)}$

où $A(t)$ = une primitive de $a(t)$

C = une constante qq

p.ex. $y'(t) = 2y(t)$

$y_H(t) = C e^{2t}$ $(C \in \mathbb{R})$ $\quad (2t)' = 2$

p.ex. $y'(t) = t\, y(t)$

$y_H(t) = C e^{t^2/2}$ $\quad C \in \mathbb{R}$

$C e^{t^2/2 + 1} = C e^{t^2/2} e^1 = Ce\, e^{t^2/2}$

$Ce \in \mathbb{R}$ qq

⚠ $y'(t) + t\, y(t) = 1 \quad (E)$

$\left.\begin{array}{l} (H) \quad y'(t) + t\, y(t) = 0 \\ \text{sol } y_H(t) = C e^{-t^2/2} \\ \text{où } C \in \mathbb{R} \end{array}\right)$

$y_H'(t) = C \times \left(-\frac{2t}{2}\right) e^{-t^2/2}$

$= -C t e^{-t^2/2}$

$= -t \underbrace{C e^{-t^2/2}}_{y_H(t)}$

$(e^u)' = u' e^u$

$u = u(t) = -\frac{t^2}{2}$

$\boxed{y_H' + t\, y_H = 0}$