(E) $y'(t) = a(t)y(t) + b(t)$ — équa diff linéaire

inconnue : fonction $y = y(t)$ — $t$ = le "temps" = la variable de dérivation, $y'(t) = \frac{dy}{dt}$

$a(t)$ = une fonction donnée

p.ex. $y' - 2ty = -(2t-1)e^t$

$\Leftrightarrow y'(t) = \underbrace{2t}_{a(t)}\, y(t) - (2t-1)e^t$

(H) équation homogène associée

$y'(t) = a(t)\, y(t)$

(!) $\underbrace{\text{les solutions de (E)}}_{\text{une coté de solutions}}$ sont de la forme : "$\underbrace{\text{sol. part. de (E)}}_{\substack{\text{n'importe quelle}\\ \text{sol. de (E)}\\ \text{(1 sol)}}} + \underbrace{\text{sol. g}^{\text{ale}}\text{ de (H)}}_{\substack{\text{une famille de sol.}\\ \text{(coté de sol.)}}}$"

pourquoi ?

(!) si $y_p(t)$ est une "sol. part." de (E)

alors pour toute autre sol $y(t)$ de (E) :

$$\begin{cases} y_p'(t) = a(t)\, y_p(t) + b(t) \\ y'(t) = a(t)\, y(t) + b(t) \end{cases} \Rightarrow y'(t) - y_p'(t) = a(t)\, y(t) - a(t)\, y_p(t) + \cancel{b(t)} - \cancel{b(t)}$$

$\Leftrightarrow (y - y_p)'(t) = a(t)\,(y - y_p)(t)$

$\Leftrightarrow$ la fonction $\underbrace{y - y_p}_{Y(t)}$ est sol. de l'éq. homogène (H) $\quad Y'(t) = a(t)\, Y(t)$

ccl : $y(t) - y_p(t) = \underbrace{y_h(t)}_{\text{sol. de l'éq. (H)}}$

$\Leftrightarrow y(t) = \underbrace{y_p(t)}_{\text{sol. part de (E)}} + \underbrace{y_h(t)}_{\text{sol. de (H)}}$

sol. de (H) : $\quad y'(t) = a(t)\, y(t) \quad$ ses sol : $y_h(t) = C e^{A(t)}$ où $A(t)$ = n'importe quelle primitive de $a(t)$ et $C$ = une cte réelle

pourquoi ? ce sont bien des sol de (H) :

$$\frac{d}{dt}\left(Ce^{A(t)}\right) = C \frac{d}{dt} e^{A(t)} = C\, A'(t)\, e^{A(t)}$$
$$= C\, a(t)\, e^{A(t)}$$
$$= a(t)\; Ce^{A(t)}$$

donc $Ce^{A(t)}$ vérifie (H)

ce sont les seules solutions de (H) (il n'y en a pas d'autres)

si $y_h(t)$ est sol. de (H)

dc $y_h'(t) = a(t)\, y_h(t)$

on dérive $y_h(t)\, e^{-A(t)}$ :

on veut mq : $\exists C \in \mathbb{R} ;\ y_h(t) = Ce^{A(t)}\ (\forall t)$

$\Updownarrow$

$y_h(t)\, e^{-A(t)} = C\ (\forall t)$

$$\frac{d}{dt}\left(y_h(t)\,e^{-A(t)}\right) = y'_h(t)\,e^{-A(t)} + y_h(t)\left(-a(t)\,e^{-A(t)}\right)$$

$$= a(t)\,y_h(t)\,e^{-A(t)} - a(t)\,y_h(t)\,e^{-A(t)} = 0 \quad (\forall t)$$

donc la fonction $y_h(t)\,e^{-A(t)}$ est constante

d'où : $C$ cte réelle tq $y_h(t) = C\,e^{A(t)}$

<u>exemple</u> résoudre

① $\underbrace{y' + 2y = t^2}_{(E)}$ — un <u>polynôme</u> (de d°2)

$y' = -2y + t^2$

$$y(t) = \underbrace{C\,e^{-2t}}_{\substack{\text{sol. gale} \\ \text{de } (H)}} + \underbrace{t^2/2}_{\substack{\text{une sol} \\ \text{part. de } (E)}}$$

primitive de $-2$ ; ?

où $C \in \mathbb{R}$

!

on essaie : $\underbrace{\frac{d}{dt}\left(\frac{t^2}{2}\right)}_{t} + \underbrace{2\left(+\frac{t^2}{2}\right)}_{+\,t^2} \overset{?}{=} t^2 \quad t + t^2 \overset{?}{=} t^2$ non

$\exists$ ? sol cte $\left.\begin{array}{l} y(t) = k \\ y'(t) = 0 \end{array}\right) \to 2k = t^2 \to \left(k = \frac{t^2}{2}\right)$ pas cte

$\underset{0}{y'} + 2y = 1 \to 2y = 1 \to y = \frac{1}{2}$ ) ok c'est bien une cte !

pour trouver une sol. part

- chercher une sol. part. d'un certain type (en fonction de la forme de $a(t)$ et $b(t)$)
- méthode de la variaθ de la cte

↓

ici : chercher une sol part. de (E) de la forme $y_p(t) = \underbrace{a\,t^2 + b\,t + c}_{a,\,b,\,c \text{ à déterminer}}$

(E) $y' + 2y = t^2$

$$\underbrace{\frac{d}{dt}(a\,t^2 + b\,t + c)}_{2at + b} + 2(a\,t^2 + b\,t + c) \overset{?}{=} t^2$$

$$\underset{\uparrow 1}{(\,\text{—}\,)}\,t^2 + \underset{\shortparallel\, 0}{(\,\text{—}\,)}\,t + \underset{\shortparallel\, 0}{(\,\text{—}\,)} \overset{?}{=} t^2$$

$$\to \begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ b = -\frac{1}{2} \\ c = \frac{1}{4} \end{cases}$$

Ainsi :
$y_p(t) = \frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{2}t + \frac{1}{4}$
est sol part. de (E)

<u>ccl</u> : la sol. gale de (E) est $y(t) = C\,e^{-2t} + \frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{2}t + \frac{1}{4}$ (où $C \in \mathbb{R}$) ] une océ de solutions

⊕ ci $y(0) = 1 \rightsquigarrow 1 = C + \frac{1}{4}$ d'où $C = \frac{3}{4}$

↳ une <u>unique sol</u> :

$$y(t) = \frac{3}{4}e^{-2t} + \frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{2}t + \frac{1}{4}$$

(E) $y' + 2y = t^2$ sol gale de (H) : $y_h(t) = Ce^{-2t}$ (où $C \in \mathbb{R}$)

méthode de la variaO de la cte :

on cherche une fonction $C(t)$ de sorte que $y_p(t) = \underline{C(t)\, e^{-2t}}$ soit sol. de (E)

on remplace dans (E) :

$$\underbrace{\frac{d}{dt}\left(C(t)\, e^{-2t}\right)} + 2\, C(t)\, e^{-2t} \overset{?}{=} t^2$$

$$C'(t) e^{-2t} + \cancel{C(t)\left(-2e^{-2t}\right)} + \cancel{2\, C(t)\, e^{-2t}} \overset{?}{=} t^2$$

$$\frac{1}{e^x} = e^{-x}$$

$$\iff C'(t)\, e^{-2t} = t^2$$

$$\iff \underbrace{C'(t) = \frac{t^2}{e^{-2t}} = t^2 e^{2t}}_{\text{on s'est ramené à chercher "la" primitive de } t^2 e^{2t}}$$

$$\boxed{\int_a^b u(t)\, v'(t)\, dt = \left[u(t)\, v(t)\right]_a^b - \int_a^b u'(t)\, v(t)\, dt}$$

$$\int \underset{u}{t^2}\, \underset{v'}{e^{2t}}\, dt = ? = t^2 \frac{e^{2t}}{2} - \int \cancel{2}t\, \frac{e^{2t}}{\cancel{2}}\, dt$$

$$= \frac{t^2}{2} e^{2t} - \int \underset{u}{t}\, \underset{v'}{e^{2t}}\, dt$$

$$= \frac{t^2}{2} e^{2t} - \left[\underset{u}{t}\, \underset{v}{\frac{e^{2t}}{2}} - \int \frac{e^{2t}}{2}\, dt\right] = \overbrace{\frac{t^2}{2} e^{2t} - \frac{t}{2} e^{2t} + \frac{e^{2t}}{4}}^{C(t)} \quad (+\,\text{cte})$$

$\rightarrow$ une sol. part $y_p(t) = \left(\frac{t^2}{2} e^{2t} - \frac{t}{2} e^{2t} + \frac{e^{2t}}{4}\right) e^{-2t}$ (!)

$$= \frac{t^2}{2} - \frac{t}{2} + \frac{1}{4} \quad (!)$$

<u>exemple</u> résoudre $y'(t) + y(t) = 2\sin t$ $\leftarrow$

(H) $\rightarrow$ $y_h(t) = C\, e^{-t}$ $(C \in \mathbb{R})$

$\uparrow$

$y' + y = 0$

sol part ? — $y_p(t) \overset{?}{=} e^{-2\cos t} \xrightarrow{d/dt} 2\sin t\, e^{-2\cos t}$ NON...

$y_p(t) = a\cos t + b\sin t$ (!) où $a, b$ réels à déterminer

$$\underbrace{\frac{d}{dt}\left(a\cos t + b\sin t\right) + \left(a\cos t + b\sin t\right)} \overset{?}{=} 2\sin t$$

$\rightarrow -a\sin t + b\cos t + a\cos t + b\sin t = 2\sin t$

$$\iff \begin{cases} -a + b = 2 \\ a + b = 0 \end{cases}$$

$y_p(t) = \sin t - \cos t$ convient ? oui ccl : la sol g$^{\text{ale}}$ de $y' + y = 2\sin t$

est : $y(t) = \sin t - \cos t + C e^{-t}$ où $C \in \mathbb{R}$

exos

① $y' - y = (t+1)e^t$

② $y' - y = t - e^t + \cos t$

③ $(t^2+1)y' + 2ty + 1 = 0$

④ $y' + y = \dfrac{1}{1+e^t}$

⑤ $y' - 2ty = -(2t-1)e^t$