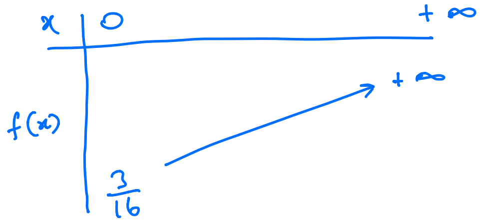
Exercice 1 $\quad f(x) = x^2 + \frac{3}{16}$

① f est dérivable sur $\mathbb{R}$ (polynôme) avec $f'(x) = 2x$

Ainsi $f'(x) > 0$ pour $x > 0$,

donc f est strictement croissante sur $[0, +\infty[$

De plus $\underbrace{f(0) = \frac{3}{16}}_{\text{inutile de parler de limite en } 0}$ et $f(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty$ (comme x^2)



② $f(x) - x = x^2 - x + \frac{3}{16}$ polynôme du 2d degré

discriminant : $\Delta = 1 - \frac{12}{16} = \frac{4}{16} = \frac{1}{4} > 0$

deux racines réelles distinctes : $\frac{1 + \frac{1}{2}}{2} = \frac{3}{4}$ et $\frac{1 - \frac{1}{2}}{2} = \frac{1}{4}$

$\begin{cases} \text{à l'extérieur des racines, } f(x) - x > 0 & (\text{signe de } x^2) \\ \text{entre les racines, } f(x) - x < 0 \end{cases}$

ou encore : $f(x) - x = \left(x - \frac{1}{4}\right)\left(x - \frac{3}{4}\right)$ factorisation qui donne le signe :

x	$-\infty$		$\frac{1}{4}$		$\frac{3}{4}$		$+\infty$
$x - \frac{1}{4}$		$-$	0	$+$		$+$	
$x - \frac{3}{4}$		$-$		$-$	0	$+$	
$f(x) - x$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Comme f est continue : si $u_n \xrightarrow[n \infty]{} \ell$, alors $u_{n+1} = f(u_n)$ tend à la fois vers ℓ et vers $f(\ell)$, d'où $f(\ell) = \ell$

les seules limites possibles de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont donc $\frac{1}{4}$ et $\frac{3}{4}$

⚠ on n'a pas prouvé que la suite converge ...

③ $u_0 \in [0, \frac{1}{4}]$

(a) Si $x \in [0, \frac{1}{4}]$, alors $0 < \underbrace{\frac{3}{16}}_{f(0)} \leq f(x) \leq \underbrace{\frac{1}{4}}_{f(\frac{1}{4})}$ d'après l'étude de f.

En raisonnant par récurrence, on montre que $u_n \in [0, \frac{1}{4}]$ pour tout $n \in \mathbb{N}$:

- $u_0 \in [0, \frac{1}{4}]$
- si $u_n \in [0, \frac{1}{4}]$, alors $u_{n+1} = f(u_n) \in [0, \frac{1}{4}]$ d'après le début de la question

donc $u_n \in [0, \frac{1}{4}]$ $\forall n \geq 0$

De plus on sait que $f(x) - x \geq 0$ si $x \in [0, \frac{1}{4}]$

Donc $u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n \geq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

et ainsi la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est <u>croissante</u>

(!) Bien faire la différence entre $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et f !

P-ex. dire " la suite est croissante sur $[0, \frac{1}{4}]$ "

n'a pas de sens : la suite est croissante, ou pas ...

Mais : <u>parce que</u> $u_0 \in [0, \frac{1}{4}]$, et d'après l'étude de $f(x)$

et de $f(x) - x$, on voit que (u_n) est croissante

(b) La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante et majorée (par $\frac{1}{4}$)

donc elle converge. Les seules limites possibles étant $\frac{1}{4}$ et $\frac{3}{4}$,

on a $\boxed{u_n \xrightarrow[n \to \infty]{} \frac{1}{4}}$

j'aurais dû enlever les bornes

④ Même type de rédaction lorsque $u_0 \in]\frac{1}{4}, \frac{3}{4}[$:

- d'abord $u_n \in]\frac{1}{4}, \frac{3}{4}[$ $\forall n \geq 0$ (récurrence)
- puis $u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n \leq 0$ $\forall n \geq 0$ (signe de $f(x) - x$)

donc $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante

- donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge (décroissante minorée par $\frac{1}{4}$)
- d'où $\boxed{u_n \xrightarrow[n\infty]{} \frac{1}{4}}$

! si $u_0 = \frac{3}{4}$ alors la suite est constante : $u_n = \frac{3}{4}$ $\forall n$
(donc elle converge vers $\frac{3}{4}$ ...)

5 Si $u_0 > \frac{3}{4}$:

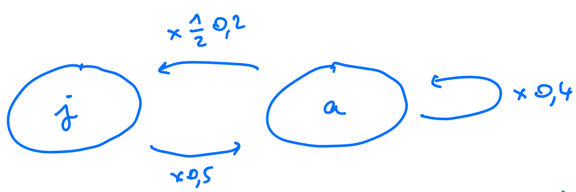
- $u_n > \frac{3}{4}$ $\forall n \geqslant 0$ (récurrence)
- $u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n > 0$ $\forall n \geqslant 0$ (signe de $f(x) - x$)

  donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante
- donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne peut pas avoir de limite réelle

  (ses seules limites possibles sont $\frac{1}{4}$ et $\frac{3}{4}$)

  donc $\boxed{u_n \xrightarrow[n\infty]{} +\infty}$ (suite croissante sans limite réelle)

Exercice 2



$$\begin{cases} j_{n+1} = 0{,}1\, a_n \\ a_{n+1} = 0{,}5\, j_n + 0{,}4\, a_n \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} j_{n+1} \\ a_{n+1} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0{,}1 \\ 0{,}5 & 0{,}4 \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} j_n \\ a_n \end{pmatrix}$$

polynôme caract : $\chi_A(\lambda) = \lambda^2 - 0{,}4\lambda - 0{,}05$

$\Delta = 0{,}36 = (0{,}6)^2$

valeurs propres : $\lambda_1 = -0{,}1$ et $\lambda_2 = 0{,}5$

vecteurs propres : $\lambda_1 = -0{,}1$ $AX = -0{,}1X$

donne p.ex $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

$\lambda_2 = 0{,}5$ $AX = 0{,}5X$

donne p.ex $\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}$

matrice de passage : $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$ $\det P = 6$ $P^{-1} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

$A = PDP^{-1}$ avec $D = \begin{pmatrix} -0{,}1 & 0 \\ 0 & 0{,}5 \end{pmatrix}$

donc $A^n = \underline{P}\, D^n\, \underline{P}^{-1}$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (-0{,}1)^n & 0 \\ 0 & (0{,}5)^n \end{pmatrix} \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \dots$$

$$= \frac{1}{6} \left(\begin{array}{c|c} 5\times(-0{,}1)^n + (0{,}5)^n & -(-0{,}1)^n + (0{,}5)^n \\ \hline -5\times(-0{,}1)^n + 5\times(0{,}5)^n & (-0{,}1)^n + 5\times(0{,}5)^n \end{array} \right)$$

! la ci $\begin{pmatrix} 20 \\ 100 \end{pmatrix} = 20 \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}$ est un <u>vecteur propre</u>

(pour la vp $\lambda_2 = 0{,}5$)

donc $A \begin{pmatrix} 20 \\ 100 \end{pmatrix} = (0{,}5) \begin{pmatrix} 20 \\ 100 \end{pmatrix}$

puis par récurrence : $A^n \begin{pmatrix} 20 \\ 100 \end{pmatrix} = (0{,}5)^n \begin{pmatrix} 20 \\ 100 \end{pmatrix}$

or $(0{,}5)^n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ (car $|0{,}5| < 1$)

ccl : <u>extinction</u> progressive de l'espèce