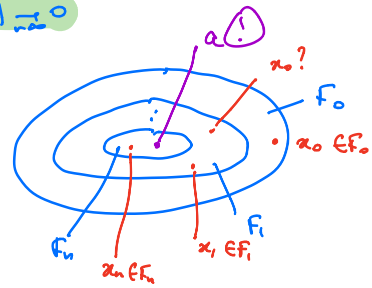
thm de Cantor (fermés emboîtés)

(X,d) complet $\iff$ si $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suite décroissante de fermés non vides tq $\mathrm{diam}(F_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ alors $\underbrace{\bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n}$ $\neq \emptyset$

[en fait forcément c'est un singleton ...]

$F_{n+1} \subseteq F_n \quad \forall n \geq 0$



($\Rightarrow$) !!

pour chaque $n\in\mathbb{N}$:

choisir $x_n \in F_n$ $(\neq \emptyset)$

$\to$ une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de pts de X

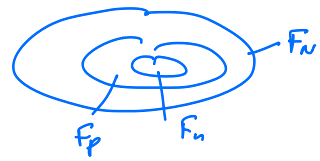
elle est de Cauchy !

si $\varepsilon > 0$: soit $N\in\mathbb{N}$; $\forall n \geq N$ $\mathrm{diam}(F_n) < \varepsilon$

si $n,p \geq N$: $F_n, F_p \subseteq F_N$

donc $\left.\begin{array}{l} x_n \in F_n \\ x_p \in F_p \end{array}\right\} \Rightarrow x_n, x_p \in F_N$

$\mathrm{diam}(F_N) < \varepsilon$ donc $d(x_n, x_p) < \varepsilon$



(X,d) complet donc (x_n) cv $\quad a = \lim_{n\to\infty} x_n$

a est le pt cherché : $a \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n$ $\quad$ ($a \in F_n \ \forall n$) $\quad$ F_n fermé

(!) n donné : $x_p \in F_p \subseteq F_n$ $\forall p \geq n$

or $x_p \xrightarrow[p\to\infty]{} a$

donc $a \in \overline{F_n} = F_n$

(a = limite d'une suite de pts de F_n)

donc $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n \neq \emptyset$

($\Leftarrow$) si tte suite ...

alors (X,d) complet

soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy de X

(!) Pour mq elle cv, il suffit de mq elle a une val. d'adhérence

Or (!) $\{\text{val. d'adh. de } (x_n)_{n\in\mathbb{N}}\} = \underbrace{\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{\{x_p \,;\, p \geq n\}}}_{\text{une intersection de fermés !}}$

$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n$

$A_n = \{x_p \,;\, p \geq n\}$

$A_n \neq \emptyset$ donc $F_n := \overline{A_n} \neq \emptyset$

$A_n \supseteq A_{n+1}$

donc $F_n \supseteq F_{n+1}$

(!) (x_n) de Cauchy dit que

$\mathrm{diam} \underbrace{\{x_p \,;\, p \geq n\}}_{A_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

$\forall \varepsilon > 0, \exists n \in \mathbb{N} \,;\, \forall p,q \geq n$

$d(x_p, x_q) < \varepsilon$

$\mathrm{diam}(A_n) \leq \varepsilon$

(!) $\mathrm{diam}(\underset{\overline{A_n}}{\underset{\shortparallel}{F_n}}) = \mathrm{diam}(A_n)$

donc $\bigcap F_n \neq \emptyset$

donc $\exists$ va

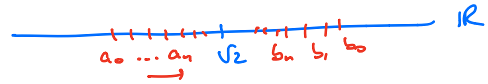
donc cv

(!) hypothèses ($\Leftarrow$)

(X, d) complet

$\mathbb{Q}$ usuel (pas complet)

$a_n, b_n \in \mathbb{Q}$ tq $a_n \uparrow \sqrt{2}$ $b_n \downarrow \sqrt{2}$



$F_n = \mathbb{Q} \cap [a_n, b_n]$: $\underbrace{\quad}_{\text{un fermé de } \mathbb{Q}}$

F_n fermé

$\mathbb{R}$ usuel: $\bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} \underbrace{]0, \tfrac{1}{n}]}_{\text{pas fermé ...}} = \emptyset$

$\underbrace{\bigcap F_n}_{\text{dans } \mathbb{Q}\,!} = \emptyset$ $\qquad \underbrace{\bigcap F_n}_{\text{ds } \mathbb{R}} = \{\sqrt{2}\} \notin \mathbb{Q}$

$\operatorname{diam}(F_n) \to 0$

$\mathbb{R}$ usuel: $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} [n, +\infty[= \emptyset$

$\mathbb{N}$ discret: suite de C. de $\mathbb{N}$ + d discrète $\begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases}$

complet

$\forall \varepsilon > 0, \exists N ; \forall n, p \geq N, \; d(x_n, x_p) < \varepsilon$

$\varepsilon = 1 \longrightarrow N \quad n, p \geq N \quad \underbrace{d(x_n, x_p) < 1}_{\text{dc } x_n = x_p}$!

$\bigcap \underbrace{[\![n, +\infty[\![}_{\text{diam} = ? = 1} = \emptyset$

Complétude et compacité

déjà vu : (X, d) compact $\Rightarrow$ complet

$\not\Leftarrow$: $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ complet pas compact

Q : complet + ? $\Rightarrow$ compact

borné ? non : ??

précompact ! ok

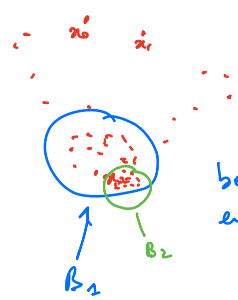
sur $\mathbb{R}$ — TD compacité $\mathbb{R} \longrightarrow \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$

nvelle d sur $\mathbb{R}$ $\longrightarrow$ m̂ topo sur $\mathbb{R}$ (topo usuelle)

Thm complet + précompact $\Rightarrow$ compact

dém mq séquentiellement compact

Soit (x_n) suite de pts de (X, d)



boules de rayon 1 en nbre fini

① précompacité : on recouvre X par un nbre fini de boules ouvertes de rayon 1

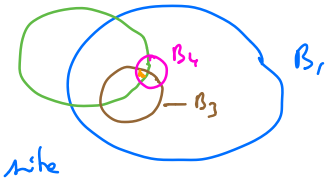
(!) une de ces boules, B_1, contient une osté de termes de la suite (x_n)

$\{n \in \mathbb{N} ; x_n \in B_1\}$ est ∞

② de m̂ : on recouvre X (et donc aussi B_1 !) par un nbre fini de boules de rayon $\frac{1}{2}$

une de ces boules, B_2, contient donc une osté de termes parmi l'osté des termes qui sont ds B_1 !

$\{n \in \mathbb{N} ;\ x_n \in B_1 \cap B_2\}$ est ∞



③ etc... on obtient une suite de boules $(B_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$

tq B_n rayon $\frac{1}{n}$

$B_1 \cap B_2 \cap \dots \cap B_n$ contient une infinité de termes de la suite

④ On peut alors trouver une extractrice $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$

tq $\underbrace{x_{\phi(n)} \in B_1 \cap \dots \cap B_n}_{\text{une infté de termes}} \subseteq B_n \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$

$d(x_{\phi(n)}, x_{\phi(p)}) < 2\frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$

$\phi(n-1) < \phi(n)$

diam $B_n \to 0$

⑤ (!) $(x_{\phi(n)})$ de Cauchy

soit $\varepsilon > 0$ soit $N \in \mathbb{N}$; $\frac{1}{N} < \varepsilon/2$

si $n, p \geq N$ $\quad \phi(n), \phi(p) \geq N$ donc $\left.\begin{matrix} x_{\phi(n)} \\ x_{\phi(p)} \end{matrix}\right) \in B_1 \cap \dots \cap B_{\phi(N)} \subseteq B_{\phi(N)} \subseteq B_N$

NON !

mais $\boxed{\left.\begin{matrix} x_{\phi(n)} \\ x_{\phi(p)} \end{matrix}\right) \in B_N}$

$B_1 \cap \dots \cap B_{\phi(N)} \subseteq \underbrace{B_{\phi(N)}}_{\text{boule de rayon}}$ $\phi(N) \geq N$

$\frac{1}{\phi(N)} \leq \frac{1}{N}$

$x_{\phi(n)} \in B_1 \cap B_2 \cap \dots \cap B_N \cap \dots \cap B_{\phi(n)}$

⑥ Or (X,d) est complet, donc $(x_{\phi(n)})$ converge

$\boxed{\text{CQFD}}$

exemple cube de Hilbert (H,d) $\quad H = [0,1]^{\mathbb{N}}$ ens. des suites à valeurs dans $[0,1]$

$x \in H \quad x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \quad x_n \in [0,1]$

$d(x,y) = \underbrace{\sum_{n \geq 0} \frac{|x_n - y_n|}{2^n}}_{cv}$ distance sur H

(!) $\sum \frac{1}{2^n}$ cv

(!) $|x_n - y_n| \leq 1$

$0 \leq \frac{|x_n - y_n|}{2^n} \leq \frac{1}{2^n}$

H est compact
$+d$: ① (H,d) précompact exo
② (H,d) complet exo

Exemple (!) d'espace complet

X ensemble qq (non vide)

$\mathcal{B}(X,\mathbb{R})$ ens. de fonctions bornées $X \xrightarrow{f} \mathbb{R}$

\+ distance d_∞ $\quad d_\infty(f,g) := \sup_{x\in X} |f(x) - g(x)|$

<u>thm</u> : $(\mathcal{B}(X,\mathbb{R}), d_\infty)$ est complet

<u>dém</u> Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy de $(\mathcal{B}(X,\mathbb{R}), d_\infty)$ ← complet !

(!) On veut mq cette suite cv, c-à-d :
il existe $f : X \to \mathbb{R}$ <u>bornée</u> tq $\underbrace{f_n \xrightarrow[n\infty]{} f \text{ par } d_\infty}_{\text{convergence uniforme}}$

① on commence par montrer que (f_n) cv <u>simplement</u>

(!) $\mathbb{R}$ est complet (espace d'arrivée)

soit $x \in X$ $\quad \xrightarrow{?}$ $\underbrace{(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}}$ cv <u>dans $\mathbb{R}$</u>

soit $\varepsilon > 0$

soit $N \in \mathbb{N}$; $\forall n,p \geq N$, $d_\infty(f_n, f_p) < \varepsilon$ $\quad$ [la suite (f_n) est de C. par d_∞]

(!) $\quad 0 \leq |f_n(x) - f_p(x)| \leq d_\infty(f_n, f_p) < \varepsilon$

donc $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy <u>dans $\mathbb{R}$</u>

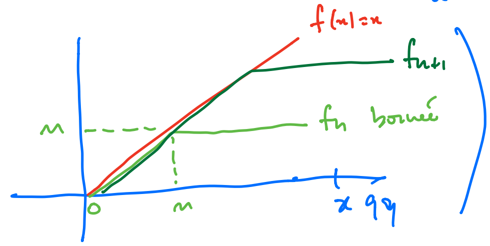
Or $\mathbb{R}$ est complet donc cette suite cv $\quad f_n(x) \xrightarrow[n\infty]{} \underset{f(x)}{\text{une certaine limite réelle}}$

x fixé

② D'où $\left\{ \begin{array}{l} f : X \to \mathbb{R} \\ \quad x \mapsto f(x) = \lim_{n\infty} f_n(x) \end{array} \right\}$ $\quad$ on va mq $\underbrace{f \text{ est } \underline{\text{bornée}} \text{ et que } f_n \to f \text{ } \underline{\text{unif}^t}}$

en m tps $\quad d_\infty(f_n, f) < \varepsilon$

Soit $\varepsilon > 0$



$f_n \to f$ simplement