$\boxed{\text{Complétude}}$

puis — EVN et espaces de Banach
— Espaces de Hilbert

1) Suites de Cauchy
2) Espaces métriques complets
3) Fermés emboîtés (Cantor)
4) Complétude et compacité
5) $\mathcal{B}(X,\mathbb{R})$ avec d_∞
6) Thm de pt fixe
7) Prolongement
8) Complétion

1 Suites de Cauchy

dans $\mathbb{R}$: $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$

$\forall \varepsilon>0, \exists N\in\mathbb{N};\ \forall n,p\geq N\ ,\ \underbrace{|x_n-x_p|}_{\text{dist. entre } x_n \text{ et } x_p}<\varepsilon$

dans un (X,d) métrique : $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy

si (déf) $\boxed{\forall \varepsilon>0, \exists N\in\mathbb{N};\ \forall n,p\geq N\ ,\ d(x_n,x_p)<\varepsilon}$

⚠ $\hat{m}$ rôle : ε et N

diam $\{x_n;\ n\geq N\}\leq\varepsilon$

⚠ notion métrique

des distances fort^t équiv. $\longrightarrow$ $\hat{m}$ notion de suite de Cauchy

d et d' tq $\alpha d\leq d'\leq\beta d$ (α,β cts >0)

mais : des distances top^t équiv ne donnent pas tjs la $\hat{m}$ notion de s. de Cauchy (ex-TD)

Prop (X,d) métrique

1. Toute suite cv est de Cauchy
2. Toute suite de Cauchy est bornée
3. Toute suite de Cauchy qui a une val. d'adhérence est cv

$\boxed{\forall \varepsilon>0, \exists N\in\mathbb{N};\ \forall n,p\geq N\ ,\ d(x_n,x_p)<\varepsilon}$

dém ① Soit (x_n) suite cv $a=\lim\limits_{n\infty} x_n$

Soit $\varepsilon>0$

Soit $N\in\mathbb{N};\ \forall n\geq N,\ d(x_n,a)<\varepsilon/2$

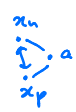
Alors si $n,p\geq N$:

$d(x_n,x_p)\leq d(x_n,a)+d(a,x_p)<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$

On a donc bien un $N\in\mathbb{N}$ tq :

$\forall n,p\geq N,\ d(x_n,x_p)<\varepsilon$

Donc (x_n) est de Cauchy



② Cauchy $\Rightarrow$ borné

Soit (x_n) une s. de Cauchy

Soit $N\in\mathbb{N}$ tq

$\forall n,p\geq N\quad d(x_n,x_p)<1\qquad(\varepsilon=1)$

En part : $(p=N)$

$x_n\in B(x_N,1)\quad\forall n\geq N$

$\underbrace{x_0,x_1,\dots x_{N-1}}_{\text{en nbre fini}}\ ,\ \underbrace{x_N,\ x_{N+1},\dots}_{\in B(x_N,1)}$

d'où R assez gd

tq $x_n\in B(x_N,R)\quad\forall n\in\mathbb{N}$:

$R:=\max(1,\ d(x_0,x_N)+1,\ \dots,\ d(x_{N-1},x_N)+1)$

(3) Cauchy + va $\Rightarrow$ cv (!)

Soit (x_n) suite de Cauchy
possédant une val. d'adh. $a \in X$

Il existe une extract. $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$
tq $x_{\phi(n)} \xrightarrow[n\infty]{} a$

Soit $\varepsilon > 0$:

il existe N_1 tq $\forall n,p \geq N_1$, $d(x_n, x_p) < \varepsilon/2$

il existe N_2 tq $\forall n \geq N_2$, $d(x_{\phi(n)}, a) < \varepsilon/2$

Posons $N := \max(N_1, N_2)$

si $n \geq N$:

$d(x_n, a) \leq \boxed{\underbrace{d(x_n, x_{\phi(n)})}_{< \varepsilon/2}} + \underbrace{d(x_{\phi(n)}, a)}_{< \varepsilon/2} < \varepsilon$

(!) $n \leq \phi(n)$

Donc $x_n \xrightarrow[n\infty]{} a$

?

$\underline{\phi(n) \geq n} \geq N \geq N_1$

$\underline{n, \phi(n)} \geq N_1$

$d(x_n, x_{\underset{p}{\phi(n)}}) < \varepsilon/2$

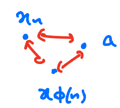
(!) Dans $(\mathbb{Q}, |\cdot|)$

x_n "$\longrightarrow \sqrt{2}$"

$\in \mathbb{Q}$

de Cauchy de $\mathbb{Q}$

mais pas cv de $\mathbb{Q}$



(!) $(X, d_X) \xrightarrow{f\ C^0} (Y, d_Y)$

$(x_n) \leadsto (f(x_n))$

s. de C. pas néc^t de C.

mais : si f est uniformément continue

alors (x_n) s. de Cauchy $\Rightarrow$ $(f(x_n))$ s. de Cauchy

dém $(X, d_X) \xrightarrow{f} (Y, d_X)$ unif^t c

(x_n) de C.

Soit $\varepsilon > 0$

f unif^t C^0 : il existe un $\delta > 0$

tq $\forall x, x' \in X$ $d_X(x, x') < \delta \Rightarrow d_Y(f(x), f(x')) < \varepsilon$

Soit $N \in \mathbb{N}$ tq $\forall n, p \geq N$ $d_X(x_n, x_p) < \delta$

si $n, p \geq N$: $d_Y(f(x_n), f(x_p)) < \varepsilon$

Donc $(f(x_n))$ est de Cauchy (de Y)

② Espaces métriques complets

(X,d) complet = espace métrique dans lequel toute suite de Cauchy est convergente $\longrightarrow$ $A \subseteq X$ est complète si avec la distance induite d_A, (A,d_A) est complète — notion absolue

ex : $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ est complet $\boxed{\text{Thm}}$

dém : (x_n) de C. ds $\mathbb{R}$
elle est bornée
donc (!) elle admet une v. d'adh.
donc elle cv (!)

ex : $(\mathbb{Q}, |\cdot|)$ n'est pas complet

(!) d et d' fort^t éq. sur X

(X,d) complet $\Leftrightarrow$ (X,d') complet

Prop Tout espace métrique compact est complet

dém Dans un espace cpct, toute suite admet une v. d'adh.
Donc toute suite de C. cv

Prop (X,d) métrique $\quad A \subseteq X$

① si A est complète, alors A est fermée dans X

② si X est complet et A fermée ds X alors A est complète

dém ① On suppose. A complète.

Soit (x_n) une suite de pts de A tq $x_n \to x$ dans X

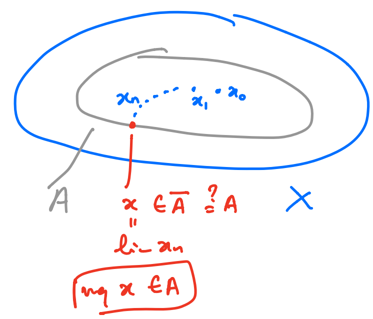
(!) (x_n) cv ds X donc (x_n) est de Cauchy (ds X)

donc (x_n) est de Cauchy vue comme suite de pts de A

Or A complète :

donc (x_n) cv dans A

unicité de la limite $\longrightarrow$ $x \in A$

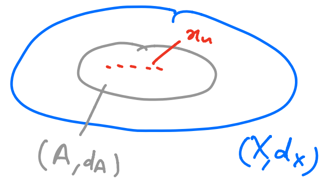


$$\left.\begin{array}{l} x_n \longrightarrow x \text{ dans } (X, d_X) \\ (x_n) \text{ cv ds } A \\ x_n \longrightarrow a \text{ ds } (A, d_A) \end{array}\right] \Rightarrow x = a$$

(!) $A \subseteq (X, d_X)$, d_A $\qquad \underbrace{x_n \in A \longrightarrow a \in A}_{\text{ds } A}$ $\Rightarrow$ $\underbrace{x_n \to a}_{\text{dans } X}$!

(d_A) ═══ (d_X)

2) $\left.\begin{array}{l}X \text{ complet} \\ A \text{ fermée ds } X\end{array}\right) \Rightarrow A$ cplète



Soit (x_n) une $\underbrace{\text{suite de C.}}_{\text{au sens de } d_A}$ de (A, d_A)

Alors (x_n) est aussi une suite de pts de X,

et elle est de Cauchy ds X (!)

Or X complet... Donc (x_n) cv dans X

Or A fermée ds X, donc $\lim x_n \in \bar{A} = A$

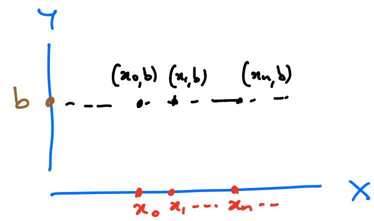
Donc (x_n) cv dans A

Donc (A, d_A) est complet.

Prop (X, d_X) et (Y, d_Y) métriques (non vides)

Alors $X \times Y$ est complet (pour d_∞, d_1, d_2)

$\Leftrightarrow$ (X, d_X) et (Y, d_Y) sont complets



dém $\Rightarrow$ hyp $(X \times Y, d_\infty)$ cplet mq X cplet

(x_n) de Cauchy de pts de X

(!) $Y \neq \emptyset$ soit $b \in Y$ $\rightarrow$ (x_n, b) suite de pts de $X \times Y$

$d_\infty((x_n,b),(x_p,b)) = \max(d_X(x_n,x_p), \underbrace{d_Y(b,b)}_{=0})$

$= d_X(x_n, x_p)$

donc $((x_n,b))_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans $(X\times Y, d_\infty)$

donc $(x_n, b) \longrightarrow (a, b)$ ds $X \times Y$

ds X

donc (X, d_X) est complet.

$\Leftarrow$ (X, d_X) et (Y, d_Y) cplets

(!) $\boxed{\begin{array}{l} 0 \leq d_X(x_n, x_p) \leq d_\infty((x_n,y_n),(x_p,y_p)) \\ 0 \leq d_Y(y_n,y_p) \leq d_\infty((x_n,y_n),(x_p,y_p)) \end{array}}$

Soit $((x_n,y_n))$ suite de Cauchy de $(X\times Y, d_\infty)$

donc (x_n) et (y_n) sont de Cauchy ds (X, d_X) (Y, d_Y) respect.t

donc $\begin{cases} x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x \text{ ds } X \text{ (complet)} \\ y_n \xrightarrow[n\to\infty]{} y \text{ ds } Y \text{ (complet)} \end{cases}$

donc $(x_n, y_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} (x,y)$ dans $X \times Y$

ex (!) $\mathbb{R}^n$ usuel est complet $\mathbb{R}^n = \mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R}$

d_∞

(d_1, d_2)

③ Thm des fermés emboîtés (Cantor)

Thm (X,d) espace métrique. Équivalence entre :

(i) (X,d) est complet ← métrique

(ii) Toute suite décroissante de fermés (de X) non vides dont le diamètre tend vers 0 possède une intersection non vide

métrique

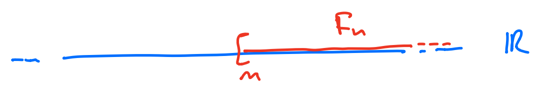
!

! compacité : si X espace top compact ! alors toute intersection décroissante de fermés non vides est non vide } tout est topologique

$$\left.\begin{array}{l} F_n \text{ fermé de } X \\ F_n \neq \emptyset \\ F_{n+1} \subseteq F_n \quad \forall n \end{array}\right\} \Rightarrow \bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n \neq \emptyset$$

! (X,d) compact $\Rightarrow$ (X,d) complet

exemple : $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ est complet



$F_n = [n, +\infty[$ fermé non vide

$F_{n+1} \subseteq F_n$

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \underbrace{[n, +\infty[}_{\text{le diam est } \infty} = \emptyset$$