**Année 2020-2021**
**L3 — SV Concours**
**HLMA509 Mathématiques**

# EXAMEN

5 novembre 2020
durée 1h30
tous documents, calculatrices, téléphones, aide extérieure... interdits ☺

**Exercice 1.** On considère une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ donnée par son premier terme $u_0 \geq 0$ et par la relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$ avec $f(x) = x^2 + \frac{3}{16}$.

(1) Étudier la fonction $f$ sur $[0, +\infty[$ : variations, limite à l'infini.
(2) Déterminer le signe de $f(x) - x$. Quelles sont les limites possibles de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ?
(3) On suppose dans cette question que $u_0$ appartient à $[0,\frac{1}{4}]$
  (a) Montrer que $u_n \in [0,\frac{1}{4}]$ pour tout $n \geq 0$. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
  (b) Quelle est la nature de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ : convergente ou non ? Si elle est convergente, donner sa limite en justifiant.
(4) On suppose dans cette question que $u_0$ appartient à $[\frac{1}{4},\frac{3}{4}]$
  (a) Montrer que $u_n \in [\frac{1}{4},\frac{3}{4}]$ pour tout $n \geq 0$. Étudier la monotonie de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
  (b) Quelle est la nature de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ : convergente ou non ? Si elle est convergente, donner sa limite en justifiant.
(5) On suppose dans cette question que $u_0 > \frac{3}{4}$.
  (a) Étudier la monotonie de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
  (b) Quelle est la nature de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ : convergente ou non ? Si elle est convergente, donner sa limite en justifiant.

**Exercice 2.** On considère l'évolution d'une population d'oiseaux année par année, en s'intéressant uniquement au nombre de femelles. On observe les caractéristiques suivantes : les oiseaux deviennent adultes au bout d'un an, le sexe des nouveaux-nés est équilibré (50% mâles, 50% femelles), chaque année 20% des femelles adultes (un an et plus) pondent en moyenne un œuf, le taux de survie des jeunes (entre 0 et 1 an) est de 50%, le taux de survie des adultes (un an et plus) est de 40%.

(1) **Modélisation.**
  (a) Définir les classes d'âge de cette population en fonction des données de l'énoncé. Faire un schéma de la dynamique.
  (b) Modéliser l'évolution de la dynamique sous forme matricielle.
(2) **Étude d'une matrice.** On pose $A = \begin{pmatrix} 0 & 0{,}1 \\ 0{,}5 & 0{,}4 \end{pmatrix}$
  (a) Déterminer les valeurs propres de $A$.
  (b) Pour chaque valeur propre, déterminer les vecteurs propres associés.
  (c) Déterminer une matrice inversible $P$ et une matrice diagonale $D$ telles que $A = PDP^{-1}$.
  (d) En déduire la matrice $A^n$ pour $n \in \mathbb{N}^*$ (on demande de calculer explicitement les coefficients).
(3) **Retour à l'étude de la population.** On suppose que, à l'année initiale $n = 0$, la population comprend 20 femelles juvéniles et 100 femelles adultes.
  (a) Déterminer le nombre de femelles juvéniles et adultes à l'année $n$.
  (b) Quel est le devenir de cette population lorsque $n$ tend vers l'infini ?