Exercice 1 X ens. infini

+ topologie du "complémentaire fini"

les fermés de cette top = (par déf) $\begin{cases} X \text{ tout entier} \\ \text{les parties finis} \end{cases}$

les ouverts = $\begin{cases} \emptyset \\ \text{parties dont le complémentaire est fini} \end{cases}$

exo : mq c'est bien une topologie $\begin{cases} \emptyset \text{ et } X \text{ ouverts} \\ \quad X - X = \emptyset \text{ fini} \\ U_i \text{ ouverts } \forall i \in I \Rightarrow \bigcup_{i \in I} U_i \text{ ouvert } X \\ U, V \text{ ouverts} \Rightarrow U \cap V \text{ ouvert} \end{cases}$

U_i ouvert qq soit $i \in I$ $\quad V := \bigcup_{i \in I} U_i \quad X - V = \bigcap_{i \in I} \underbrace{(X - U_i)}_{\text{fermé}}$

- ou bien tous les $X - U_i = X$ et alors $X - V = X$ fermé ok (dc V ouvert)
- ou bien au moins un $X - U_i$ est fini et alors $\bigcap_{i \in I} (X - U_i)$ est fini

U, V ouverts $\quad U \cap V$?

$X - (U \cap V) = \underbrace{(X - U)}_{\text{fermé}} \cup \underbrace{(X - V)}_{\text{fermé}}$

si l'un des deux est X, alors $X - (U \cap V) = X$ fermé

sinon : les deux sont finis donc $(X - U) \cup (X - V)$ fini donc fermé

Montrer que X est quasi-compact :

Soit $(U_i)_{i \in I}$ un recouvrement ouvert de X "Soit $X = \bigcup_{i \in I} U_i$ un rect ouvert de X"

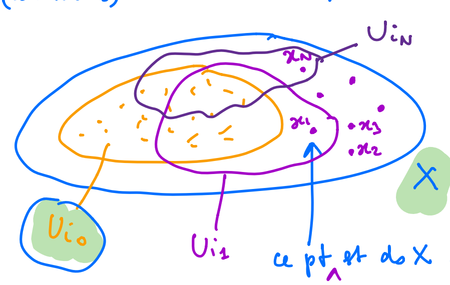
chaque U_i : soit vide
soit son complémentaire est fini

possible que tous les U_i soient vides ? $X = \bigcup_{i \in I} U_i$ serait vide ... or X est infini
donc NON

Il y a donc (au moins) un $i_0 \in I$ tel que $U_{i_0} \neq \emptyset$

- Si $U_{i_0} = X$ tout entier, alors c'est fini : $X = U_{i_0}$
- Sinon : ?

pts de X pas dans U_{i_0}



ce pt est de X donc appartient à un certain U_i (x_1)
à U_{i_1}

de m : $x_2 \in U_{i_2}$

On obtient : $X = U_{i_0} \cup U_{i_1} \cup \dots \cup U_{i_N}$!? On a bien trouvé un sous-rect fini du recouvrement initial.

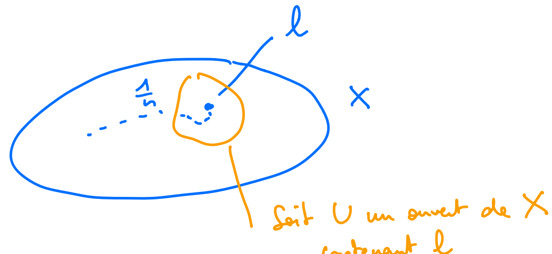
@ Fanny : si $X = \bigcup_{i \in I} U_i = \emptyset$

$\uparrow$ tous vides ?

$\frac{1}{n} \xrightarrow[n\infty]{} \ell$?? ℓ réel qq

$n \xrightarrow[n\infty]{} \ell$!

$e^n \to \ell$



$\in X-U$ $X-U$ est : fini donc $\exists N \in \mathbb{N} ; \forall n \geq N, \frac{1}{n} \notin (X-U)$

$\Downarrow$

$\frac{1}{n} \in U$

$\underbrace{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots}$

cet ensemble de nombres est ... infini

$\boxed{\text{Exercice 2}}$ Dans $M_n(\mathbb{R})$ usuel $M_n(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^{n^2}$ + topo usuelle (d_∞, d_1, d_2 produit)

distance d_∞ sur $M_n(\mathbb{R})$

$$d_\infty(A,B) = \max_{\substack{i=1,\dots,n\\ j=1,\dots,n}} \left(|a_{ij} - b_{ij}| \right) \quad \underset{\text{isométrie}}{\cong} \quad (\mathbb{R}^{n^2}, d_\infty)$$

$A = (a_{ij})_{i=1,\dots,n,\ j=1,\dots,n}$

$B = (b_{ij})$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \longleftrightarrow (a_{11}, \overset{?}{a_{12}}, \overset{?}{a_{21}}, a_{22})$$

$\updownarrow$

$(a_{11}, a_{21}, a_{12}, a_{22})$

$(M_n(\mathbb{R}), d_\infty)$ est isométrique à $(\mathbb{R}^{n^2}, d_\infty)$

les compacts de $M_n(\mathbb{R})$ sont les parties fermées (dans $M_n(\mathbb{R})$) et bornées pour d_∞

(i) $GL_n(\mathbb{R})$ fermé dans $M_n(\mathbb{R})$? NON donc $\boxed{\text{pas compact}}$

borné pour d_∞ ? NON

(!) $M_n(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^{n^2} = \mathbb{R}^N$

$\mathbb{R} \times \mathbb{R} \dots \times \mathbb{R}$ il est (cet espace top) connexe

(!) $GL_n(\mathbb{R})$ est un ouvert de $M_n(\mathbb{R})$

$= \det^{-1}(\mathbb{R}^*)$

$\uparrow$ C^0 $\uparrow$ un ouvert de $\mathbb{R}$

$n=2$ $\quad \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{1}{n} & 0 \\ 0 & \frac{1}{n} \end{pmatrix}}_{\text{inversibles}} \xrightarrow[n\to\infty]{} \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{\text{non-inversible}}$ $\qquad \begin{pmatrix} \frac{1}{n} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & \frac{1}{n} \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\underbrace{\begin{pmatrix} n & 0 \\ 0 & n \end{pmatrix}}_{\text{inversible}}$ pas borné

(ii) Diag(n) fermé ? ~~...~~ OUI

$\mathrm{Diag}(2) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{R}) ;\ b = c = 0 \right\}$

$=$

$$\begin{array}{ccc} M_2(\mathbb{R}) & \xrightarrow{f\ C^0} & \mathbb{R}\times\mathbb{R} \\ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} & \longmapsto & (b, c) \end{array}$$

(a, b, c, d)
$\quad\ \uparrow\ \uparrow$

$\mathrm{Diag}(2) = f^{-1}\Big(\underbrace{\{0,0\}}_{\substack{\text{un fermé} \\ \text{de } \mathbb{R}^2}}\Big) = f^{-1}(0,0)$

Diag(n) borné ? NON $\quad \begin{pmatrix} n & 0 \\ 0 & \cancel{n}\ 1 \end{pmatrix}$ pas borné

Diag(n) pas compact.

$M_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$? $\leftarrow$ dans les (i,j) tq $i \neq j$

$(a_{ij}) \longmapsto$

$\mathrm{Diag}(n) = \underbrace{\bigcap_{\substack{i,j \in \{1,\dots,n\} \\ i \neq j}}}\ \{ A \in M_n(\mathbb{R}) ;\ a_{ij} = 0 \}$

$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \uparrow$
$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad \pi_{i,j}(A)$

(iii) $SL_n(\mathbb{R}) = \{ A \in M_n(\mathbb{R}) ;\ \det(A) = 1 \} = \det^{-1}(1) = \det^{-1}(\{1\})$

$\uparrow$ det C^0 $\qquad \uparrow$ un fermé de $\mathbb{R}$

fermé ? (dans $M_n(\mathbb{R})$ ...)

OUI

borné ? $\begin{pmatrix} n & 0 \\ 0 & \frac{1}{n} \end{pmatrix}$

NON $\qquad 2\times 2$

$SL_n(\mathbb{R})$ pas compact

$\|\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}\|_2^2 \qquad \langle \begin{pmatrix} a \\ \cancel{b}c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} \rangle = 0$

(iv) $O(n) = \{ A \in M_n(\mathbb{R}) ;\ {}^tAA = I_n \}$

$n=2 \qquad A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ orthogonale $\Longleftrightarrow \begin{cases} a^2 + c^2 = 1 \\ b^2 + d^2 = 1 \\ ab + cd = 0 \end{cases}$

$\quad\ \uparrow\ \uparrow$
vect. colonnes

$O(n)$ est donc fermé

$$O(2) = \underbrace{\{A \,;\, a^2+c^2=1\}}_{f^{-1}(1)} \cap \underbrace{\{A \,;\, b^2+d^2=1\}}_{g^{-1}(1)} \cap \underbrace{\{A \,;\, ab+cd=0\}}_{h^{-1}(0)}$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \xmapsto[C^0]{f} a^2+c^2 \quad \text{etc...}$$

$O(2)$ borné ? $\quad A \in O(2) \quad \|A\|_\infty \leq 1$

oui !

⚠ $]0,1[\subseteq [0,1]$

$]0,1[$: pas cpct. $\quad [0,1]$: cpct

$O(n)$ est compact ⚠

$$(\sim) \quad SO(n) = \{A \in \underbrace{O(n)}_{\text{cpct}} \,;\, \underbrace{\det(A) = 1}_{\text{condition "fermée"}}\}$$

c'est un compact car... c'est un fermé de $\underset{\text{cpct}}{\underline{O(n)}}$

vendredi : exos 3-4-5

⚠