rappel : $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ polycar : $\chi_A(\lambda) = \lambda^2 - 5\lambda + 4 = (\lambda-1)(\lambda-4)$

val. propres : 1 et 4

vect. propres ? vp 1 : $AX = 1X$ où $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

p.ex $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = 1\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

vp 4 $AX = 4X$

p.ex $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ $\underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}}_{A}\underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}}_{X} = \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \end{pmatrix} = 4\underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}}_{X}$

$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ inv.

$A = P^{-1} D P$ où $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow$ $D = P A P^{-1}$

$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ polynôme caractéristique ?

$\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_2) = \det\begin{pmatrix} -\lambda & -1 \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - (-1) = \lambda^2 + 1$

ses racines ? ~~les~~ λ ? tq $\lambda^2 = -1$

pas de solution réelle ...
mais solutions complexes !

deux solutions complexes : i et $-i$

la matrice A possède donc deux valeurs propres complexes

<u>vecteurs propres complexes associés</u> ?

pour la valeur propre i : on cherche à résoudre $AX = iX$ où $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ (un vecteur-colonne <u>complexe</u> $x, y \in \mathbb{C}$)

$\longrightarrow$ c.à.d $\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{\text{matrice réelle}}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \underset{\uparrow \text{ nbre cplexe non réel}}{i}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 0x - 1y = ix \\ 1x - 0y = iy \end{cases}$ $\Leftrightarrow \begin{cases} -y = ix \\ x = iy \end{cases}$ "les m" équations

(!) $x = iy \xrightarrow{\times i} ix = i(iy) = i^2 y = -y$

$\Leftrightarrow$ $x = iy$

p.ex $y = 1$ donne $x = i$

(!) les $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ tq $AX = iX$ sont de la forme $X = \begin{pmatrix} iy \\ y \end{pmatrix} = y\underbrace{\begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}}_{(!)}$

m̂ chose pour la vp $-i$

on cherche $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ tq $AX = -iX \iff \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = -i\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

$$\iff \begin{cases} \boxed{-y = -ix} \\ x = -iy \end{cases} \quad \text{"m̂" équations}$$

$$x = -iy \xrightarrow{\times(-i)} (-i)x = (-i)(-iy)$$

$$\iff \underbrace{-ix} = (-i)(-i)y = \underbrace{(-1)(-1)}_{+1}\underbrace{i^2}_{-1}y = \underbrace{-y}$$

$$\iff x = -iy$$

(!) les $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ tq $AX = -iX$ sont de la forme $X = \begin{pmatrix} -iy \\ y \end{pmatrix} = y\begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix}$ (!)

Comme dans le cas réel, posons :

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{matrice} \\ \text{de} \\ \text{passage}}}{P} = \begin{pmatrix} i & -i \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{cc} \uparrow & \uparrow \\ \text{vp } i & \text{vp } -i \end{array}$$

c'est une matrice <u>complexe</u>

inversible ? $\det(P) = i \times 1 - (1 \times (-i)) = i + i = 2i$

$\det(P) = 2i$ $\quad$ $\det(P) \neq 0$ donc P est inversible !

$$P^{-1} = \frac{1}{2i}\begin{pmatrix} 1 & i \\ -1 & i \end{pmatrix}$$

vérifions que P^{-1} est bien l'inverse de P :

$$\underbrace{P\,P^{-1}} = \begin{pmatrix} i & -i \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\frac{1}{2i}\begin{pmatrix} 1 & i \\ -1 & i \end{pmatrix} = \frac{1}{2i}\begin{pmatrix} i & -i \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & i \\ -1 & i \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2i}\left(\begin{array}{c|c} i+i & -1+1 \\ \hline 1-1 & i+i \end{array}\right)$$

$PP^{-1} = I_2$

$$= \frac{1}{2i}\begin{pmatrix} 2i & 0 \\ 0 & 2i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$$

$$\underset{\substack{\parallel \\ \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}}{A} \overset{?}{=} PDP^{-1} \quad \text{où } \underbrace{D = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}}_{\text{matrice diagonale (complexe!)}}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} i & -i \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}\frac{1}{2i}\begin{pmatrix} 1 & i \\ -1 & i \end{pmatrix}} = \frac{1}{2i}\underbrace{\begin{pmatrix} i & -i \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}}\begin{pmatrix} 1 & i \\ -1 & i \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2i}\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ i & -i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & i \\ -1 & i \end{pmatrix} = \frac{1}{2i}\left(\begin{array}{c|c} 0 & -2i \\ \hline 2i & 0 \end{array}\right)$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = A \text{ (!)}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}}_{A} = \underbrace{\begin{pmatrix}i&-i\\1&1\end{pmatrix}}_{P}\underbrace{\begin{pmatrix}i&0\\0&-i\end{pmatrix}}_{D}\underbrace{\frac{1}{2i}\begin{pmatrix}1&i\\-1&i\end{pmatrix}}_{P^{-1}}$$

réelle

complexes

calcul de A^n ?

$$A = PDP^{-1} \implies A^n = (PDP^{-1})(PDP^{-1})\cdots(PDP^{-1})(PDP^{-1})$$

$$= P\underbrace{D\cdots D}_{n\text{ fois}}P^{-1}$$

$$= PD^nP^{-1}$$

ici : $\underbrace{\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}^n}_{\text{réelle}} = \underbrace{P\underbrace{\begin{pmatrix}i&0\\0&-i\end{pmatrix}^n}_{D^n}P^{-1}}_{\text{complexes}} = \underbrace{\begin{pmatrix}i&-i\\1&1\end{pmatrix}}_{P}\underbrace{\begin{pmatrix}i^n&0\\0&(-i)^n\end{pmatrix}}_{D^n}\underbrace{\frac{1}{2i}\begin{pmatrix}1&i\\-1&i\end{pmatrix}}_{P^{-1}}$

! car D est diagonale

i^n ?

$i^0 = 1$

$i^1 = i$

$i^2 = -1$

$i^3 = -i$

$i^4 = i^3 i = (-i)i = (-1)(-1) = +1$

$i^5 = i$

$i^6 = -1$

$i^7 = -i$

$i^8 = 1$

comment n est-il congru mod 4 ?

0, 1, 2, 3 ?

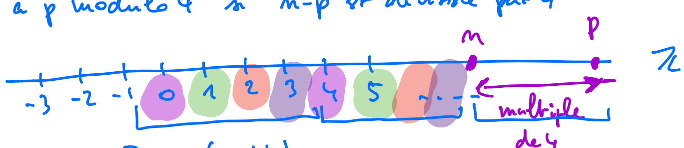
p. ex $n=3$ $\underbrace{\begin{pmatrix}i&-i\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-i&0\\0&i\end{pmatrix}\frac{1}{2i}\begin{pmatrix}1&i\\-1&i\end{pmatrix}}$ → une matrice réelle A^3

$(-i)^3 = (-1)^3 i^3 = (-1)(-i) = i$

congruence modulo 4

deux entiers n et p

n est congru à p modulo 4 si $n-p$ est divisible par 4



$5 \equiv 1 \pmod 4$

$5-1 = 4$

$9 \equiv 1 \pmod 4$

$9-1 = 8 = 2\times 4$

i^n en fonction de n ?

$i^0 = 1$	$i^4 = 1$	$i^8 = 1$	$i^{12} = 1$	$0, 4, 8, 12$ tous $\equiv 0 \pmod 4$
$i^1 = i$	$i^5 = i$	i^9		$1, 5, 9$ tous $\equiv 1 \pmod 4$
$i^2 = -1$	$i^6 = -1$	i^{10}		$2, 6, 10$ tous $\equiv 2 \pmod 4$
$i^3 = -i$	$i^7 = -i$	i^{11}		

$n \equiv 1 \pmod 4 \iff 4$ divise $n-1$

$\iff n - 1 = 4k$ (où $k \in \mathbb{Z}$)

$\iff n = 1 + 4k$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad A^n = ?$$

$n = 0$	4	8	$\dots$	I_2
1	5	9		A
2	6	10		$-I_2$
3	7	11		$-A$

$A^0 = I_2$

$A^1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = -I_2$

$A^3 = A^2 A = (-I_2) A = -(I_2 A) = -A$

$A^4 = A^3 A = (-A) A = -AA = -A^2 = -(-I_2) = I_2$

$A^5 = A^4 A = I_2 A = A$

$A^6 = A^5 A = AA = A^2$

$A^7 = A^6 A = (-I_2) A = -A$

---

autre exemple simple :

$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ polycar ? $\chi_A(\lambda) = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & -1 \\ 1 & 1-\lambda \end{pmatrix}$

$= (1-\lambda)^2 + 1$

$= \lambda^2 - 2\lambda + 2$

$\Delta = (-2)^2 - 4 \times 2 = 4 - 8 = -4 < 0$ "$\sqrt{\Delta}$" $= 2i$

A n'a pas de vp réelles
mais elle a des vp cplexes : $\dfrac{2 \pm 2i}{2} = 1 \pm i$ ⟨ $1+i$, $1-i$ les valeurs propres de A

→ vecteurs propres associés ? → $P = \begin{pmatrix} & \end{pmatrix}$ → $D = \begin{pmatrix} 1+i & 0 \\ 0 & 1-i \end{pmatrix}$ tq $A = P D P^{-1}$

→ calcul de A^n ?

p-ex. $\begin{pmatrix}1&2\\i&2i\end{pmatrix}$ det $= 2i - 2i = 0$ pas inv.

$\begin{pmatrix}1&i\\i&-1\end{pmatrix}$ det $= -1 - i^2 = -1 + 1 = 0$ pas inv.

$\boxed{\text{exo 10}}$

$A = \begin{pmatrix}7&2\\-4&1\end{pmatrix}$ $\quad P = \begin{pmatrix}1&1\\-2&-1\end{pmatrix}$ $\quad Q = \begin{pmatrix}-1&-1\\2&1\end{pmatrix}$

$PQ = \begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix} = I_2$ $\quad$ P et Q sont inverses l'une de l'autre

$QP = I_2$

$QAP = P^{-1}AP = \begin{pmatrix}?&0\\0&?\end{pmatrix} = D$ $\qquad A = PDP^{-1}$

$A^n = PD^nP^{-1}$

$\boxed{\text{exo 11}}$

$A = \begin{pmatrix}2&1&1\\1&2&1\\1&1&2\end{pmatrix}$

P et Q 3×3

$PQ = 3I_3 = \begin{pmatrix}3&0&0\\0&3&0\\0&0&3\end{pmatrix}$

donc P est inversible et son inverse est $P^{-1} = ? = \frac{1}{3}Q$

$P = \begin{pmatrix}-1&0&1\\0&-1&1\\1&1&1\end{pmatrix}$ $\qquad P\underbrace{P^{-1}}_{?} = I_3$ $\quad \frac{1}{3}Q$

$P\left(\frac{1}{3}Q\right) = \frac{1}{3}PQ = \frac{1}{3}3I_3 = I_3$

$\boxed{\text{exo 14}}$

$\begin{pmatrix}2&0&0\\0&-1&0\\0&0&3\end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix}\frac{1}{2}&0&0\\0&-1&0\\0&0&\frac{1}{3}\end{pmatrix}$

$\underbrace{\begin{pmatrix}1&-1&0\\1&0&1\\0&1&-1\end{pmatrix}}_{C}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix} \iff \begin{cases}x - y = a\\ x + z = b\\ y - z = c\end{cases}$

$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$: ?

$\iff \ldots$

$\iff \begin{cases}x = a + b + c\\ y = \\ z = \end{cases}$

$\begin{pmatrix} & & \end{pmatrix} = C^{-1}$

exo 19 ?

$$\begin{pmatrix} e_1(n) \\ e_2(n) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} e_1(n+1) \\ e_2(n+1) \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|c} 1+f_1-m_1-p_1 & f_2 \\ \hline p_1 & 1-m_2 \end{array}\right) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{données} \\ \text{num.}}}{=} \underbrace{\left(\begin{array}{c|c} \frac{1}{4} & 2 \\ \hline \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{array}\right)}_{\text{vp sont } \frac{5}{4} \text{ et } -\frac{3}{4}}$$