Connexité

HLMA502 Topologie des espaces métriques

Université de Montpellier – Faculté des Sciences

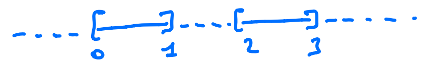
2 novembre 2020

Objectif

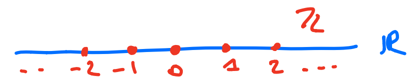
- formaliser l'idée d'espace topologique « en un seul morceau » ou « en plusieurs morceaux »

- par exemple :

  - $\mathbb{R}$ et $[0,1]$ sont en un seul morceau
  - $[0,1] \cup [2,3]$ est en deux morceaux



  - $\mathbb{Z}$ se décompose en une infinité de morceaux



  - $GL_n(\mathbb{R})$ est en combien de morceaux ?
- comprendre que le **théorème des valeurs intermédiaires** est un résultat de connexité

(+) Connexité par arcs

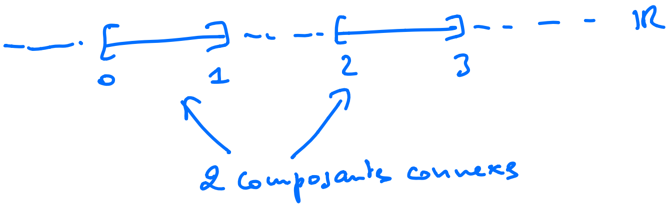
Plan

Introduction : décompositions ensemblistes, topologiques

Espaces topologiques connexes

Théorème des valeurs intermédiaires

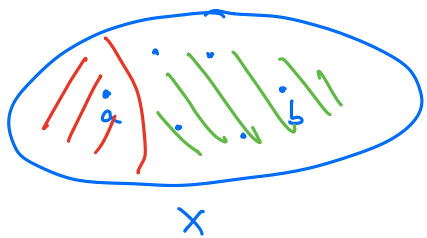
Composantes connexes



Connexité par arcs

Décomposition ensembliste

- tout ensemble possédant au moins 2 éléments peut être décomposé en deux parties disjointes
- dessin : ensemble X, points a et b distincts, décomposition



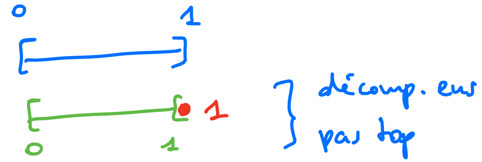
$X = \{a\} \cup \underbrace{X - \{a\}}_{\neq \emptyset}$ $(b \in X - \{a\})$

$X = A \cup B$ avec $A \cap B = \emptyset$

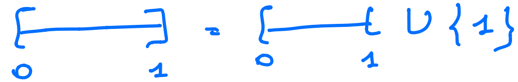
"union disjointe"

$X = A \sqcup B$

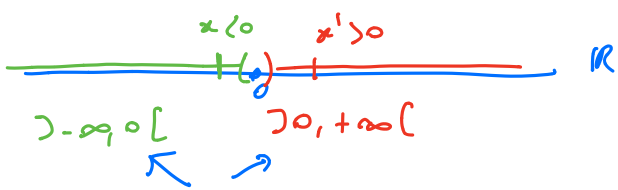
Décomposition topologique (1)



- certaines décompositions ensemblistes ne semblent pas tenir compte de la topologie
- par exemple : $[0,1] = [0,1[\cup \{1\}$



- a-t-on envie de dire que l'on a ainsi décomposé $[0,1]$ en deux morceaux ? ensemblistement oui, mais topologiquement non !
- en revanche, $[0,1] \cup [2,3]$ paraît bien composé de 2 morceaux
- qu'est-ce qui différencie les deux situations ?
- dans la décomposition ensembliste $[0,1] = [0,1[\cup \{1\}$, le point 1 est « collé », c'est-à-dire adhérent, à l'autre partie $[0,1[$.
- alors que ce n'est pas le cas pour $[0,1] \cup [2,3]$, ni même pour $\mathbb{R}^* =]-\infty,0[\cup]0,+\infty[$



Décomposition topologique (2)

Définition : l'espace topologique X est **topologiquement décomposé** en deux parties non vides A, B si

$$X = A \cup B, \quad A \cap B = \emptyset, \quad A \cap \overline{B} = \emptyset, \quad B \cap \overline{A} = \emptyset \qquad (1)$$

Il y a des redondances ! (1) est équivalent à :

$\Downarrow \begin{cases} \overline{A} \subseteq X - B = A \text{ dc } A \text{ fermé} \\ \overline{B} \subseteq X - A = B \text{ dc } B \text{ fermé} \end{cases} \Downarrow$

$\Uparrow\ \overline{A} = A,\ \overline{B} = B$

$$X = A \cup B, \quad A \cap B = \emptyset, \quad A \text{ et } B \text{ sont fermés dans } X \qquad (2)$$

Et (2) est équivalent à :

$\Downarrow\ A = \underbrace{X - B}_{\text{ouvert}} \quad B = \underbrace{X - A}_{\text{ouvert}} \qquad \Uparrow\ B := X - A$

$$A \text{ est une partie de } X \text{ ouverte et fermée, et } \underbrace{B = X \setminus A}_{\neq \emptyset} \qquad (3)$$

non vide et $A \neq X$

Tout en demandant à A d'être non vide...

Espace connexe : définition

Soit $(X, \mathcal{O})$ un espace topologique.

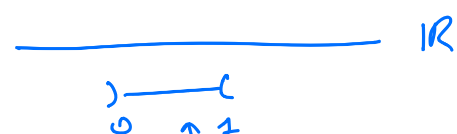
= X n'a pas de décomp. topologique

Définition

$(X, \mathcal{O})$ est **connexe** si X et $\emptyset$ sont les seules parties à la fois ouvertes et fermées. Une **partie connexe** de X est une partie $A \subseteq X$ qui est connexe pour la topologie induite (notion absolue).

D'après ce qu'on a vu avant : X est connexe si et seulement si...

- il n'existe pas d'ouverts disjoints non vides U, V tels que $X = U \cup V$.
- il n'existe pas de fermés disjoints non vides F, G tels que $X = F \cup G$.



pas fermé dans ℝ

mais fermé dans lui-même

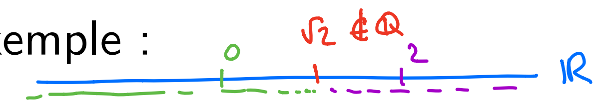
ex : ℝ est connexe (ℝ usuel)

$[0,1] \cup [2,3]$ pas un connexe de ℝ

Espace connexe : exemples

X ens. qq + topo grossière
$\underbrace{[0,1] \cup [2,3] \qquad 2 \text{ ouverts : } X \text{ et } \emptyset}_{\text{est connexe !}}$

- L'ensemble vide est connexe !
- Un singleton est connexe.
- Un espace topologique discret n'est pas connexe dès qu'il contient plus de deux éléments. Par exemple $X = \{a, b\} = \{a\} \cup \{b\}$ discret. $\{a\}$ à la fois ouvert et fermé dans $\{a,b\}$ discret
- $\mathbb{N}$ et $\mathbb{Z}$ usuels ne sont pas connexes : leur topologie est discrète.
- $\mathbb{Q}$ usuel n'est pas connexe. Par exemple :



$$\mathbb{Q} = \underbrace{(\mathbb{Q} \cap]-\infty, \sqrt{2}[\,)}_{\text{un ouvert de } \mathbb{Q} \text{ usuel}} \cup \underbrace{(\mathbb{Q} \cap]\sqrt{2}, +\infty[\,)}_{\text{un ouvert de } \mathbb{Q}}$$

$\mathbb{Q} \cap]-\infty, \sqrt{2}[$ à la fois ouvert et fermé de $\mathbb{Q}$.

décomposition en deux ouverts disjoints non vides.
- $\mathbb{R}^*$ n'est pas connexe : $\mathbb{R}^* =]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$ décomposition en deux ouverts non vides disjoints.

La connexité est une propriété topologique

Théorème

Soient X et Y des espaces topologiques homéomorphes. Alors X est connexe si et seulement si Y est connexe.

Démonstration. $X \xrightarrow{f} Y$ un homéo bij C^0 + f^{-1} C^0

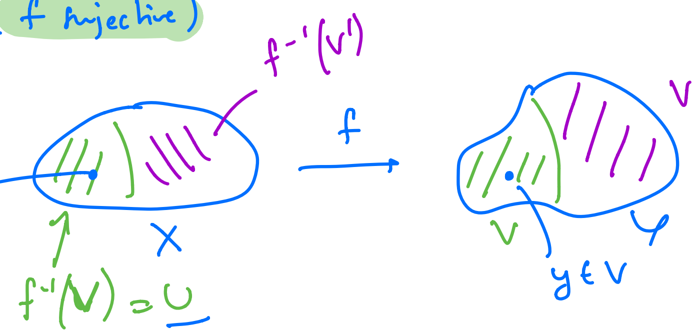
p.ar si Y pas connexe : alors il existe $V, V' \in \mathcal{O}_Y$ non vides disjoints
tels que $Y = V \cup V'$

alors $f^{-1}(V) =: U$ et $f^{-1}(V') =: U'$ sont des ouverts de X (f C^0)

de plus : U, U' non vides (f surjective)

U, U' disjoints

$\exists x \in X$ tq $f(x) = y$
dc $x \in U$



dc $X = U \cup U'$
U, U' ouv. disj. non vides) X pas connexe

$\square$

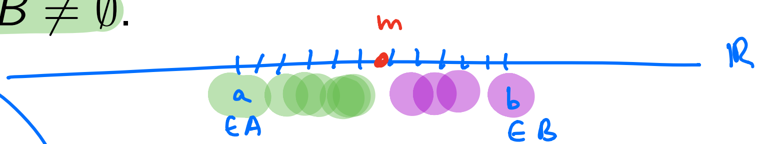
$\mathbb{R}$ est connexe

Théorème

$\mathbb{R}$ *usuel est connexe.*

Démonstration.

A, B fermés non vides de $\mathbb{R}$ tels que $\mathbb{R} = A \cup B$. On veut montrer que $A \cap B \neq \emptyset$.



a ∈ A
b ∈ B
ops a < b

⚠ regarder $\underbrace{A \cap [a,b]}$

partie de $\mathbb{R}$ non vide (a ∈ ..)
majorée (par b)

donc $\sup(A \cap [a,b]) = m$ existe

$m \in \overline{A} = A$

mais $]m,b]$ ne contient aucun pt de A

donc $]m,b] \subseteq B$ d'où $m \in \overline{B} = B$

donc $A \cap B \neq \emptyset$

□

Les connexes de $\mathbb{R}$

Théorème

Les parties connexes de $\mathbb{R}$ sont les intervalles.

Démonstration.

$]0,+\infty[$

- Les intervalles sont connexes.

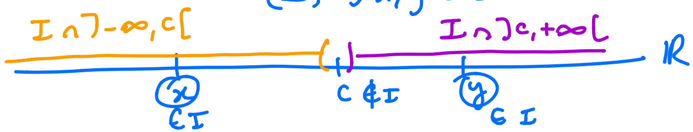
  $\mathbb{R}$ est connexe $\xrightarrow[\text{même démo}]{}$ tout intervalle $]a,b]$ $\quad [a,b]$ $\quad [a,b[$ ... est connexe $\quad a=-\infty$, $b=+\infty$

- Les intervalles sont les seuls connexes : toute partie « non-intervalle » n'est pas connexe.

  (!) $I \subseteq \mathbb{R}$ est un intervalle $\iff \forall x,y \in I,\ [x,y] \subseteq I$

  donc : I pas intervalle $\iff \exists\, x,y \in I$ tq $[x,y] \not\subseteq I$

  $\iff \exists\, x,y \in I$ et $\exists\, c \in\ ]x,y[$ tq $c \notin I$



$$I = \underbrace{\left(I \cap\ ]-\infty,c[\right)}_{\text{ouvert de } I} \cup \underbrace{\left(I \cap\ ]c,+\infty[\right)}_{\text{ouvert de } I}$$

ouverts non vides

I pas connexe

$\square$

Applications continues à valeurs dans $\{0,1\}$

⚠ $\{0,1\}$ est muni de la topologie discrète : ses ouverts sont $\emptyset$, $\{0\}$, $\{1\}$ et $\{0,1\}$.

$\mathcal{O}_{\{0,1\}} = \{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{0,1\}\}$

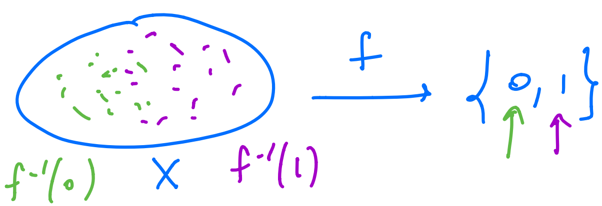
Soit X un espace topologique. A quelle condition une application $f : X \to \{0,1\}$ est-elle continue ?

Réponse : f est continue si et seulement si $f^{-1}(0)$ et $f^{-1}(1)$ sont des ouverts de X, ou encore si et seulement si $f^{-1}(0)$ est à la fois ouvert et fermé dans X.

$X \xrightarrow{f} \{0,1\}$ continue $\iff$ $\forall V$ ouv. de $\{0,1\}$, $f^{-1}(V)$ ouvert de X

$f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$ tjs un ouv. de X !

$f^{-1}(\{0,1\}) = X$ tjs un ouv. de X !



$X = f^{-1}(0) \cup f^{-1}(1)$

réunion disjointe

Caractérisation de la connexité

X un espace topologique, $\{0,1\}$ discret

Théorème

X est connexe $\Leftrightarrow$ toute application $f : X \to \{0,1\}$ est constante.

Démonstration.

- Sens $\Rightarrow$ Soit X connexe, soit $f : X \to \{0,1\}$ continue.

  Alors $f^{-1}(0)$ et $f^{-1}(1)$ sont des ouverts de X, disjoints

  $X = f^{-1}(0) \cup f^{-1}(1)$

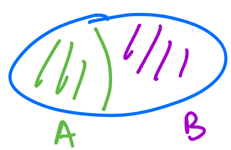
  Or X est connexe ... donc soit $f^{-1}(0) = \emptyset$ soit $f^{-1}(1) = \emptyset$

  $f^{-1}(0) = \emptyset \Rightarrow f \equiv 1$

  $f^{-1}(1) = \emptyset \Rightarrow f \equiv 0$

- Sens $\Leftarrow$ Par contraposée ⚠ : on suppose X non connexe, d'où A, B parties ouvertes disjointes non vides tq $X = A \cup B$. On construit f...

  X pas connexe $\Rightarrow \exists\, A, B$ ouv. disj. non vides tq $X = A \cup B$



$\xrightarrow{f} \{0, 1\}$

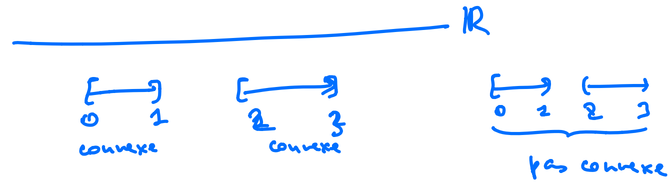
$x \in A \longmapsto f(x) = 0$

$x \in B \longmapsto f(x) = 1$

$f^{-1}(0) = A$, $f^{-1}(1) = B$) ouv. de X

$\square$

Propriétés de la connexité



X espace topologique

Théorème

1. *Si A, B parties connexes tq $\boxed{A \cap B \neq \emptyset}$, alors $A \cup B$ est connexe.*
2. *Généralisation à $\bigcup_{i \in I} A_i$ lorsque $\bigcap_{i \in I} A_i \neq \emptyset$.*
3. *Si $A \subseteq B \subseteq \overline{A}$ avec A connexe, alors B est connexe.*
4. *Cas particulier : A connexe $\Rightarrow \overline{A}$ connexe.*

Démonstration.

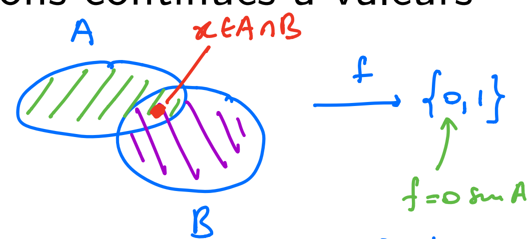
On utilise la caractérisation par les applications continues à valeurs dans $\{0, 1\}$.

① A, B connexes
$A \cap B \neq \emptyset$

$A \cup B \xrightarrow{f\ C^0} \{0,1\}$

$f_{|A} : A \longrightarrow \{0,1\}$ C^0
donc constante (A connexe)

de m̂ $f_{|B} : B \longrightarrow \{0,1\}$ C^0
donc constante



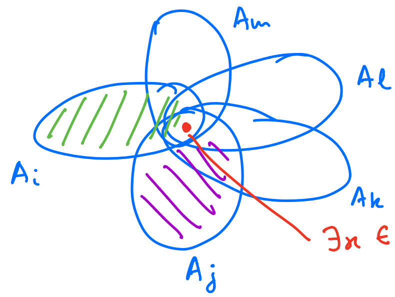
forcément
$f = 0$ sur B

f cte sur $A \cup B$

③ cf poly (détails)

$A \subseteq B \subseteq \overline{A}$

② Généralisation



$\exists x \in$ tous les A_i $(i \in I)$

<u>tous connexes</u>

alors $\bigcup_{i \in I} A_i$ est connexe

③ X espace top $A, B \subseteq X$

<u>hyp</u> : $\underset{\substack{\uparrow \\ \text{connexe}}}{A} \subseteq \underline{B \subseteq \overline{A}}$) alors B connexe

$B \xrightarrow{f\ C^0} \{0,1\}$

$\cup$

A - C^0 de cte

$f_{|A}$ est cte

de plus $B \subseteq \overline{A}$) $\Rightarrow$ f est cte sur B

$\underline{b \in B}$ $\quad \underset{\substack{\uparrow \\ \in A}}{a_n} \longrightarrow b$

$\underset{\text{m cte}}{\underline{f(a_n)}} \longrightarrow \underset{\text{m cte}}{\underline{f(b)}}$ $\quad f\ C^0$

④ (!) A connexe $\Rightarrow$ $\overline{A}$ connexe

$A \subseteq \underset{\substack{\uparrow \\ B}}{\overline{A}} \subseteq \overline{A}$

X espace top (X, d) $\quad A, B \subseteq X$ tq $A \subseteq \underline{B} \subseteq \overline{A}$

hyp A connexe $\qquad$ ccl : B connexe

soit $f : B \to \{0,1\}$ C^0 $\qquad$ but : mq f est cte

(!) $f_{|A} : \underset{\substack{\uparrow \\ \text{connexe}}}{A} \to \{0,1\}$ est C^0) donc $f_{|A}$ est cte $\quad$ p.exemple supp. $\underline{f \equiv 0 \text{ sur } A}$

mq $f \equiv 0$ sur B :

soit $b \in B$ alors $b \in \overline{A}$

donc il existe une suite (a_n) de pts de A qui cv vers b

$\underset{\substack{\uparrow \\ \in A}}{a_n} \xrightarrow[n \infty]{} b \in \overline{A}$ $\Big\}$ dans X

comme f C^0 : $\underbrace{f(a_n)}_{\substack{0 \\ (\forall n)}} \longrightarrow f(b)$ $\Big\}$ dans $\{0, 1\}$ discret !

donc $f(b) = 0$

Connexité et théorème des valeurs intermédiaires (1)

« l'image continue d'un connexe est connexe »

Théorème

X, Y espaces top, $f : X \to Y$ continue.

1. *X connexe $\Rightarrow f(X)$ connexe.*
2. *$A \subseteq X$ connexe $\Rightarrow f(A)$ connexe.*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] & Y \\ & \cup \\ & f(X) \end{tikzcd}$$

f continue

f(X) + topo induite

restriction de f au but

aussi C^0 !

Démonstration.

f(X)

1. Soit $\alpha : \cancel{Y} \to \{0,1\}$ continue...

hyp X connexe

connexe

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f\ C^0"] \arrow[rr, bend right, "C^0"'] & f(X) \arrow[r, "\alpha\ C^0"] & \{0,1\} \end{tikzcd}$$

donc cte

donc $\underbrace{X \to \boxed{f(X) \to \{0,1\}}}_{\text{constante}}$

dc $f(X)$ connexe

2. On regarde $f_{\restriction A} : A \to Y$, elle aussi continue...

$\square$

Connexité et théorème des valeurs intermédiaires (2)

⚠ le théorème des valeurs intermédiaires

Théorème

Soit X un espace topologique connexe, soit $f : X \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Quels que soient $a, b \in X$ et $k \in [f(a), f(b)]$, il existe un $x \in X$ tel que $f(x) = k$.

Démonstration.

$f(X)$ est un connexe de $\mathbb{R}$... donc c'est un intervalle, et c'est fini !

$\square$

Exemple

Le cercle unité S^1 de $\mathbb{R}^2$ euclidien est connexe : c'est l'image continue d'un intervalle.

Il n'existe pas d'application continue injective $f : S^1 \to \mathbb{R}$. Mieux : il existe des points antipodaux $x, -x$ tels que $f(x) = f(-x)$!
Considérer $g(x) := f(x) - f(-x)$...

Produit d'espaces connexes

Théorème

$X \times Y$ est connexe $\Leftrightarrow$ X et Y sont connexes.

Démonstration.

- Sens $\Rightarrow$: image continue d'un connexe (projections)

- Sens $\Leftarrow$: ops X et Y non vides, on choisit $a \in X$ et $b \in Y$, soit $f : X \times Y \to \{0, 1\}$ continue. On montre que $f(x, y) = f(a, b)$:
  - f est constante sur $X \times \{y\}$.
  - f est constante sur $\{a\} \times Y$.
  - Donc $f(x, y) = f(a, y) = f(a, b)$, CQFD.

$\square$

Conséquence : $\mathbb{R}^n$ est connexe !

Composantes connexes (1)

Quand X n'est pas connexe, il est composé de plusieurs « morceaux » connexes, appelés ses **composantes connexes**.
Exemple : $\mathbb{R}^*$ possède deux composantes connexes.

Soit $x \in X$. On pose $C_x :=$ réunion de toutes les parties connexes de X qui contiennent x (il en existe : $\{x\}$ est connexe).

- C_x est connexe

- Si $x, y \in X$, alors ou bien $C_x = C_y$ ou bien $C_x \cap C_y = \emptyset$.

Composantes connexes (2)

Ainsi X est la réunion disjointe des différentes C_x (partition)

$C_x :=$ la **composante connexe** de x dans X

⚠ bonus : C_x est fermée

Exemples : composantes connexes de $\mathbb{R}^*$, de $\mathbb{N}$, de $\mathbb{Q}$

Connexité par arcs

Soit X un espace topologique.

Définition

- Un **chemin** (ou arc) de X est une application continue $\gamma : [0,1] \to X$.
- X est **connexe par arcs** si pour tous $x, y \in X$ il existe un chemin γ tel que $\gamma(0) = x$ et $\gamma(1) = y$.

Dessin :

Exemples : tout evn est connexe par arcs, toute partie convexe d'un evn, toute partie étoilée d'un evn

Connexité et connexité par arcs (1)

Théorème

X connexe par arcs $\Rightarrow$ X connexe.

Démonstration.

On suppose X connexe par arcs. Soit $f : X \to \{0, 1\}$ une application continue. Elle est constante :

$\square$

Connexité et connexité par arcs (2)

⚠ Réciproque fausse : connexe $\not\Rightarrow$ connexe par arcs
Exemple :

Mais ça marche dans certains cas particuliers. Par exemple : un ouvert d'un evn est connexe si et seulement si il est connexe par arcs (exercice !)

Composantes connexes de $GL_n(\mathbb{R})$

$GL_n(\mathbb{R}) = \{A \in M_n(\mathbb{R})\,;\, \det(A) \neq 0\}$

- c'est un ouvert de $M_n(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^{n^2}$
- det : $GL_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^*$ est continue surjective et $\mathbb{R}^*$ n'est pas connexe, donc $GL_n(\mathbb{R})$ **n'est pas connexe**.
- on montre que $GL_n(\mathbb{R})$ est composé de **deux composantes connexes** :
  - $GL_n^+(\mathbb{R}) = \{A\,;\, \det A > 0\}$
  - $GL_n^-(\mathbb{R}) = \{A\,;\, \det A < 0\}$
- pour cela, on montre que $GL_n^+(\mathbb{R})$ est **connexe par arcs**, en reliant toute matrice A de déterminant > 0 à la matrice I_n, de même pour $GL_n^-(\mathbb{R})$

Pour les détails : voir votre enseignant algébriste de référence Pierre-Louis Montagard !