Science et Musique

Enseignement de culture générale
(HLSEG304)

Bernard Hehlen

3ème partie

– III –

Construction des gammes

Petit lexique

- **Tonique** : première des notes d'une gamme musicale
- **Harmoniques** : multiples de la fréquence d'un son pure: $2f$, $3f$, $4f$,…
- **Octave** : double de la fréquence d'un son
- **Intervalle** : rapport de fréquence entre deux sons
- **Ton et demi-ton** : intervalles entre notes voisines
- **Comma**: intervalle très petit (~1/100-1/50 de ton)
- **Tempérament** : suite des intervalles d'une gamme musicale
  - ✓ *Parfait* ou *naturel* : basé sur des harmoniques pures
  - ✓ *Mosétonique* : construit à partir de l'échelle de Pythagore en diminuant ses quintes d'une fraction de coma syntonique
  - ✓ *Égal* : tous les ½ tons (donc toutes les notes) sont séparées du même intervalle
- **Gamme** : suite de notes dans un tempérament donné
- **Tonalité** : gamme désignée pas sa tonique (note de l'échelle diatonique) et son mode (majeur ou mineur)
- **Transposition** : reproduire un morceau dans un ton plus grave ou plus aigu. La transposition conserve la même valeur relative des intervalles entre les notes
- **Unisson :** Les instruments jouent les mêmes notes en même temps.
- **Polyphonique** : superposition de notes (accords, contrepoint,..)

Quelques questions auxquelles nous allons répondre

- Pourquoi y a-t-il sept noms de notes ?
- Pourquoi y a-t-il douze touches par octave sur le clavier du piano, et douzes cases par octaves sur le manche d'une guitare?
- Pourquoi les dièses se succèdent-ils dans l'ordre Fa Do Sol, etc… et les bemols dans l'ordre inverse ?
- Pourquoi en solfège, apprend t-on que le Sol dièse et le La bémol sont deux notes diffèrentes alors qu'elles correspondent à une même touche du piano, une même case à la guitare,…
- Pourquoi les cases de la guitare sont-elles de plus en plus petites à mesure que l'on descend sur le manche?
- Les musiques du monde utilisent-elles toutes les mêmes gammes et le même tempérament?
- …

Harmoniques et Consonance

- Depuis l'antiquité, les harmoniques, et la quinte en particulier, apparaissent comme indissociable de la justesse musicale (consonance des harmoniques)

- Une idée simple de consonance de deux sons semble se dégager : l'absence de « frottement » entre les différentes harmoniques des deux sons (cf. exemple ci après).

- La notion de consonance semble donc en définitive liée à l'absence ou à la lenteur des battements entre les harmoniques des différents sons. C'est de cette façon qu'un accordeur de piano va procéder pour accorder.

- On va voir en effet qu'il est impossible d'obtenir une absence de battements.

Les intervalles

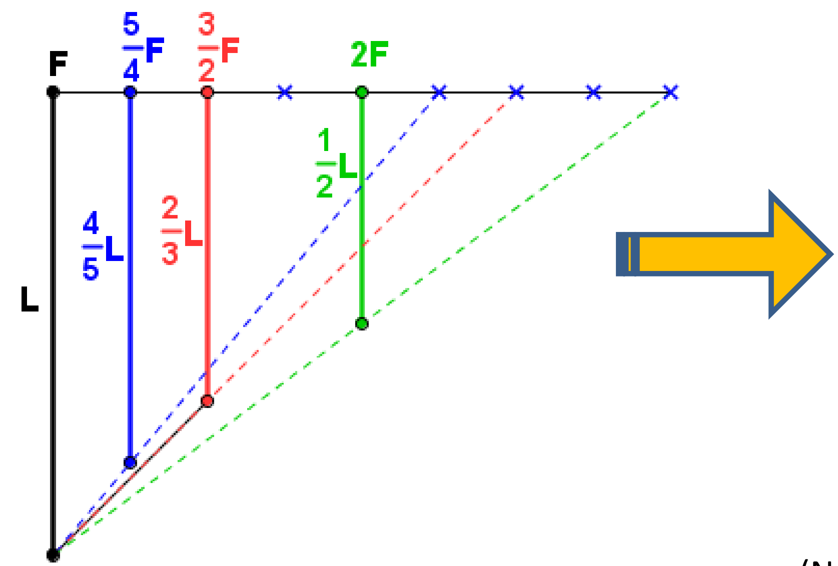
Les **chinois** ont fondés leur système musical sur la flute et le bambou, et les **grecs** ont construit le leur sur la lyre et la harpe.

⬇

Ces deux instruments sont harmoniques : le son émis est inversement proportionnel à la longueur !!

Pythagore, Thalès: nombres rationnels et musique

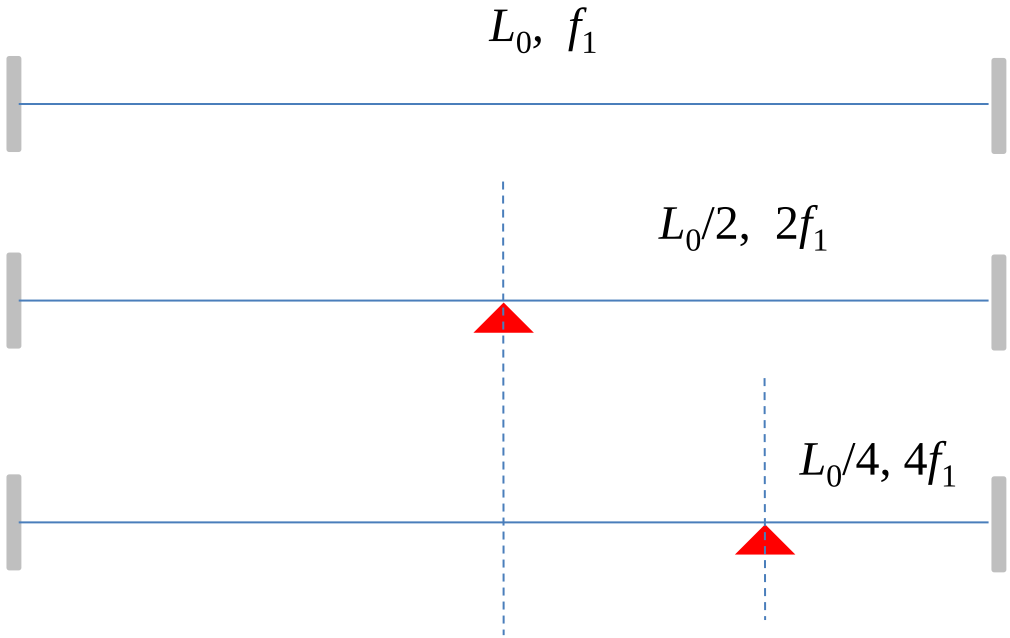
- De l'antiquité à la renaissance, musique, mathématiques et astronomie n'étaient qu'une seule « discipline» (cf « Harmonia Mundi » de Képler).
- Les nombres rationnels, rapports d'entiers, étaient représentés par 2 segments (Thalès, 625-546 av. JC).
- Les notes d'une gamme étaient représentées par des segments.
- Les fréquences sont inversement proportionnelles aux longueurs de cordes (instruments harmoniques)



Harpiste aveugle,
Tombe d'Amenemhat
(Nouvel empire égyptien , 1500-1000 av JC)

Harpe celtique

Pythagore, Thalès: nombres rationnels et musique



$$f \propto \frac{1}{L} \quad \left(= \frac{nv}{2L}\right)$$

Octave n

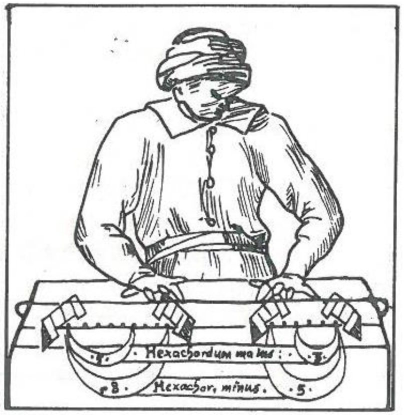
Construction des octaves : $\boxed{f_{0n} = 2^{n-1} f_1}$

La construction des notes identiques n'est pas linéaire, mais logarithmique (loi de puissance)!!

(C'est tout le problème… nous y reviendrons)

Construction des gammes :

Trois échelles occidentales historiques



✓ *Gamme de **Pythagore** : basée sur la série des quintes*

- ➢ Le monocorde est décomposé par quintes successives
- ➢ Pythagore est à l'origine de la gamme heptatonique : DO RE MI FA SOL LA SI
- ➢ Tempérament de Pythagore

✓ *Gamme naturelle (**Zarlino**): Intervalles d'harmoniques pures*

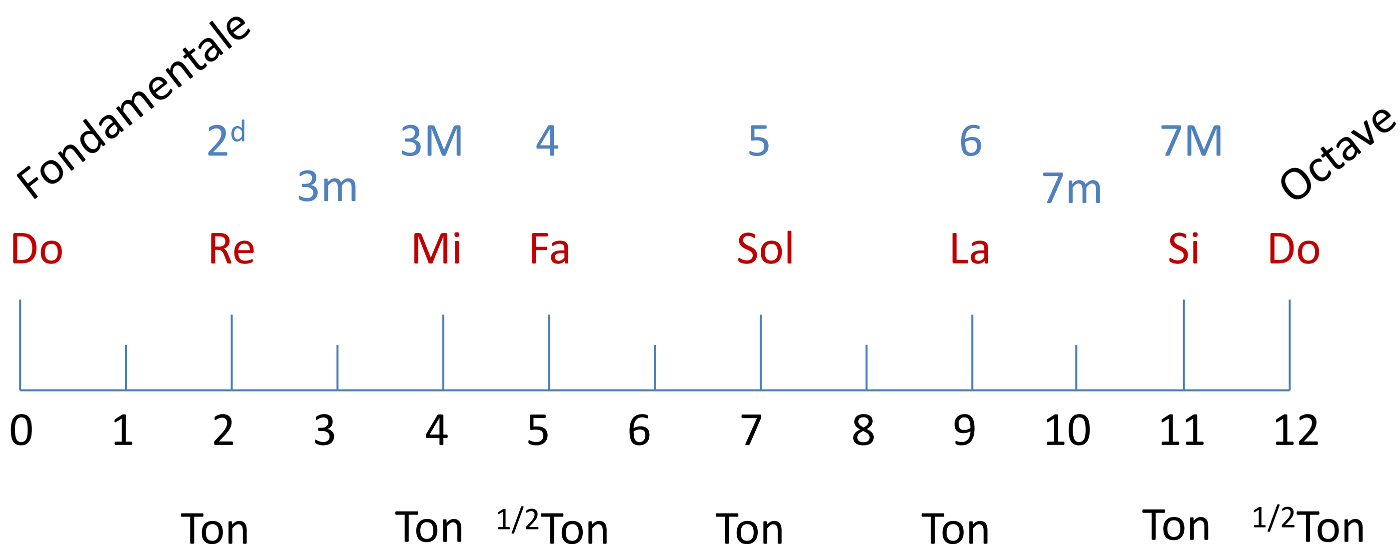
- ➢ Le monocorde est décomposé par harmoniques successives
- ➢ Zarlino conserve le sept notes de la gamme heptatonique mais…
- ➢ …tempérament de Zarlino

✓ *Gamme bien tempérée (actuelle)*

- ➢ Tempérament égal pour faciliter l'accordage, la consonance des accords, et la transposition

Nom des intervalles

Gamme heptatonique

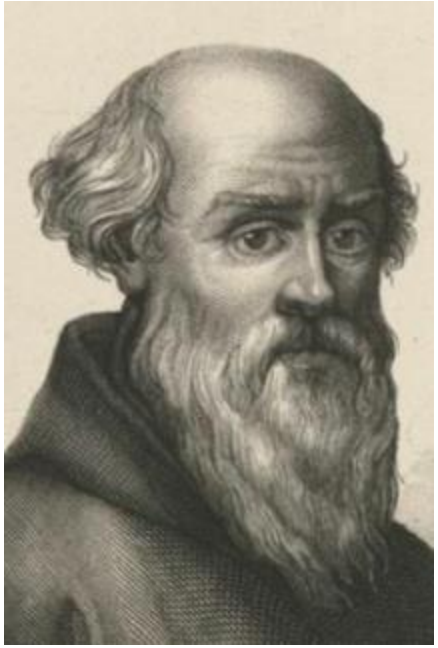


On attribut à Pythagore la gamme à sept notes, mais le nom des notes s'est imposé bien plus tard.

Ce qui différencie les gammes de Pythagore, Zarlino, et bien tempérée, ce sont les intervalles de tons et de ½ tons.

- ✓ Petite parenthèse sur le nom des notes :

Guido d'Arezzo (environ 995-1050)



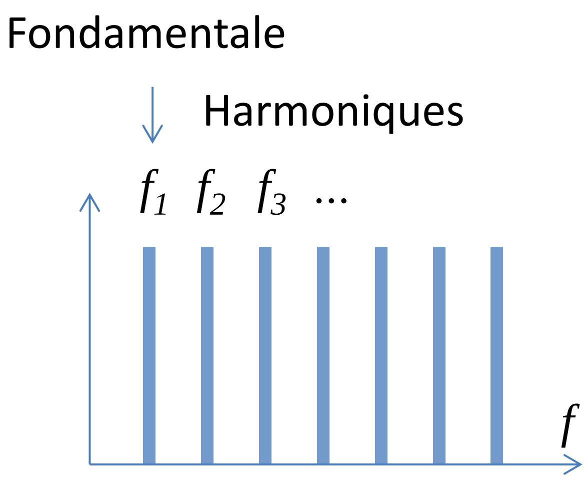
Hymne à saint jean-baptiste

« **Ut**queant laxis, **Re**sonare fibri, **Mi**ra gestorum, **Fa**muli tuorum, **Sol**ve polluti, **La**bii reatum, **S**ancte **I**oannes »

https://www.youtube.com/watch?v=2QJ03eQKS74

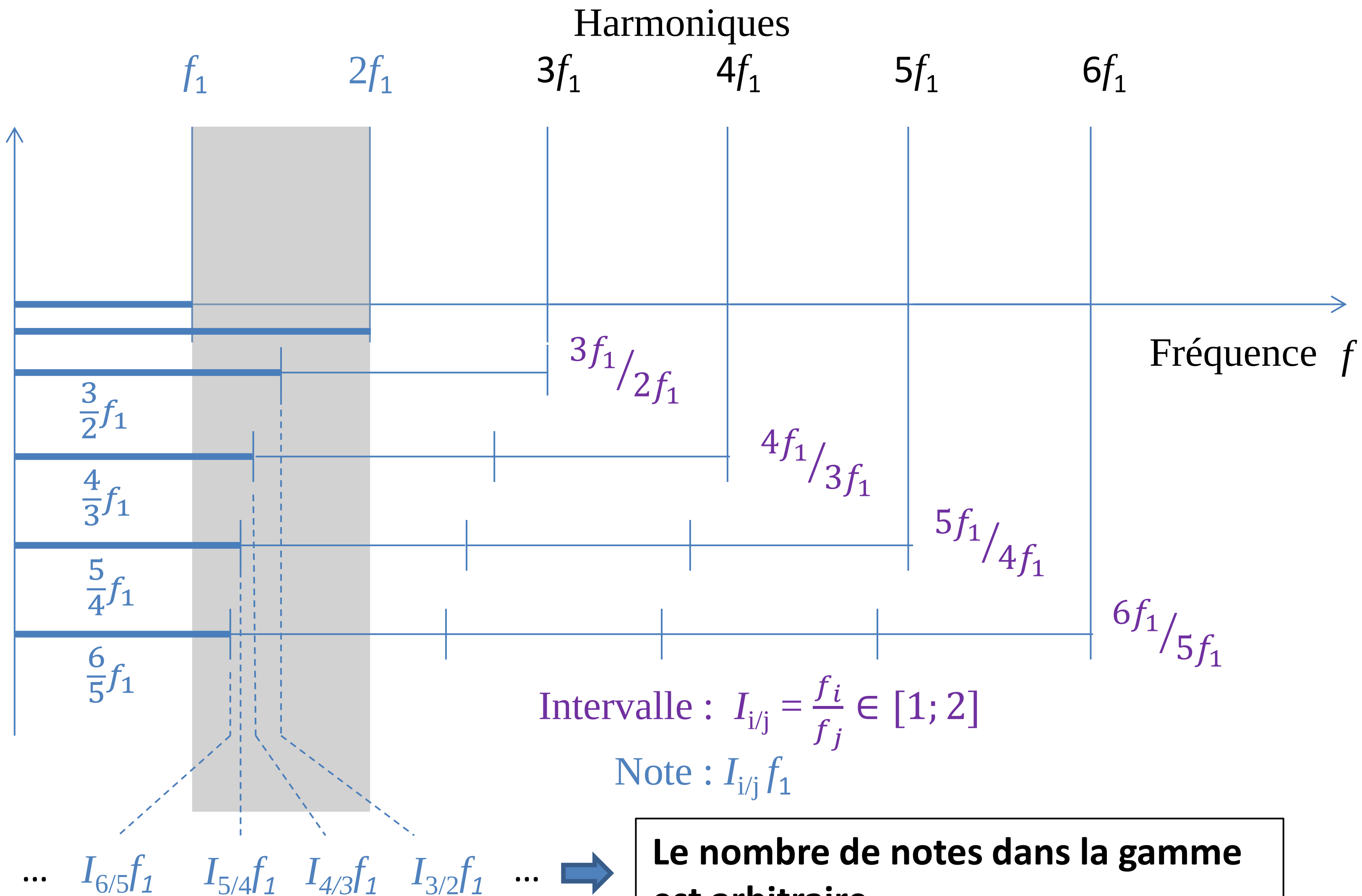
Gamme naturelle (Zarlino)

→ Construite à partir de rapports d’harmoniques naturelles



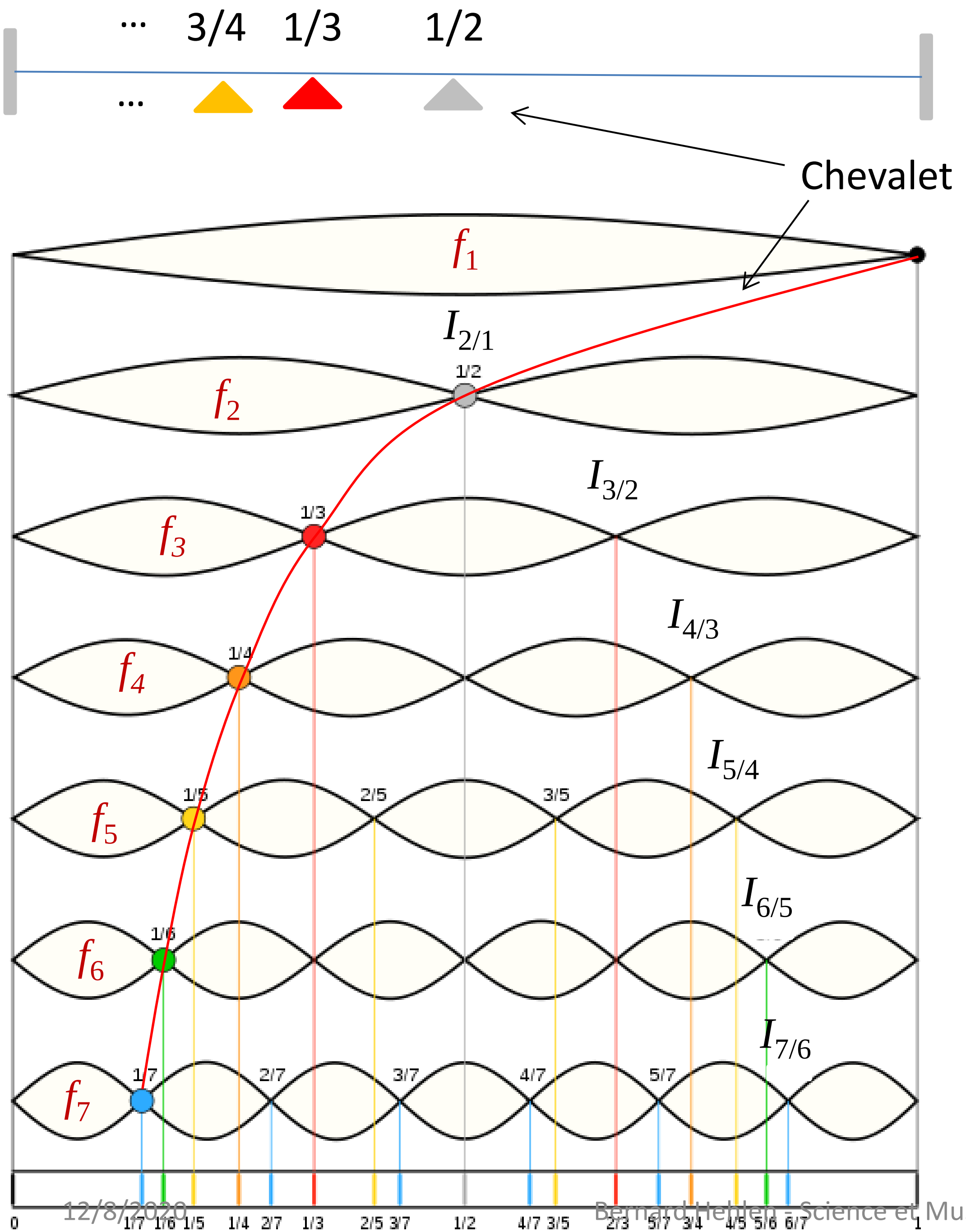
→ f_3/f_2 f_4/f_3 f_6/f_5 …

Gamme naturelle (Zarlino)



Le nombre de notes dans la gamme est arbitraire

Gamme naturelle



$I_{i/j}$: intervalles $= \dfrac{f_i}{f_j}$

	Note
$f_1 I_{2/1} = 2f_1$	Octave
$f_1 I_{3/2}$	Quinte
$f_1 I_{4/3}$	Quarte
$f_1 I_{5/4}$	Tierce Maj.
$f_1 I_{6/5}$	Tierce min.
$f_1 I_{7/6}$	
f_1	Fondamentale

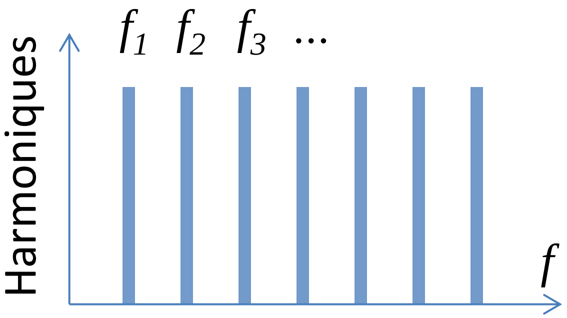
Zarlino

f

Aigu

Grave

Gamme naturelle



Construite à partir des harmoniques $f, 2f, 3f, 4f, \ldots$ induisant les intervalles :

L'octave : Intervalle entre le fondamental (f_1) et la deuxième harmonique (f_2)

[*f*, 2*f*] Intervalle : ascendant $\boldsymbol{I_{2/1}} = \frac{2f_1}{f_1} = \mathbf{2}$, descendant $I_{1/2} = \frac{1}{2}$

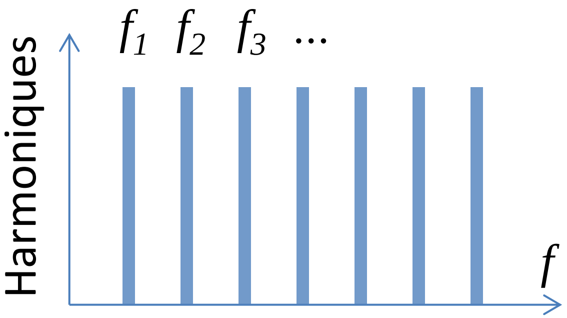
La quinte : Intervalle entre la deuxième (f_2) et la troisième harmonique (f_3)

[2*f*, 3*f*] Intervalle : ascendant $\boldsymbol{I_{3/2}} = \frac{3f_1}{2f_1} = \mathbf{\frac{3}{2}}$, descendant $I_{2/3} = \frac{2}{3}$

La quarte : Intervalle entre la troisième (f_3) et la quatrième harmonique (f_4)

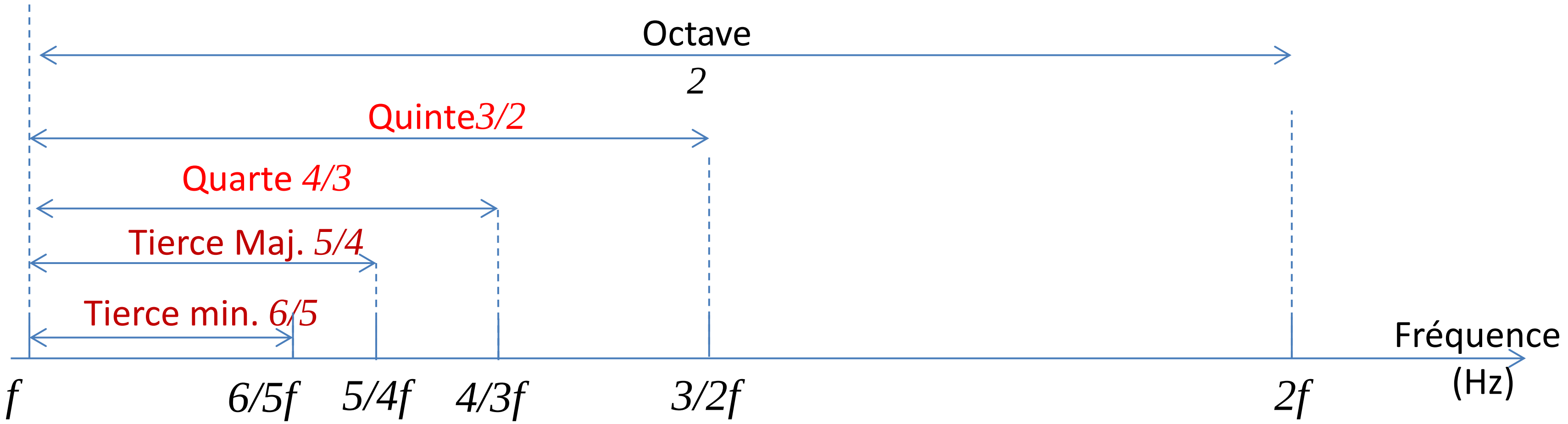
[3*f*, 4*f*] Intervalle : ascendant $\boldsymbol{I_{4/3}} = \frac{4f_1}{3f_1} = \mathbf{\frac{4}{3}}$, descendant $I_{3/4} = \frac{3}{4}$

Gamme naturelle

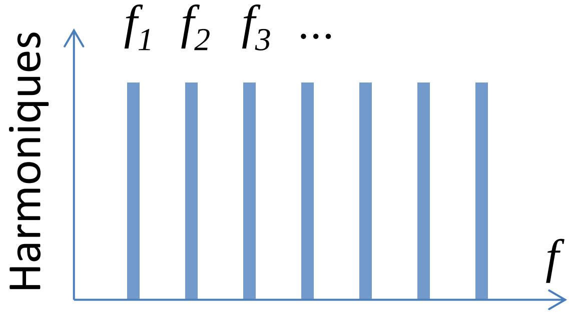


Les harmoniques supérieures induisent les intervalles de tierces:

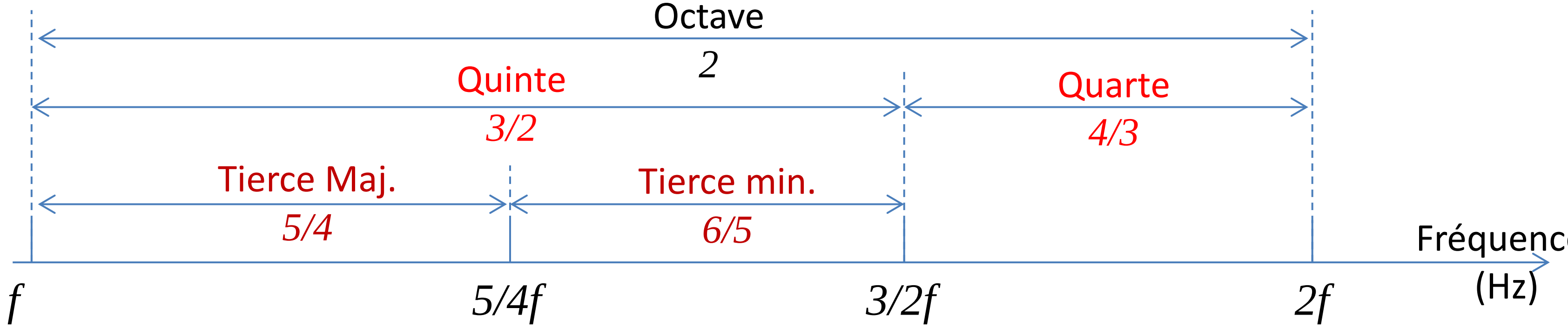
[f;$2f$] = octave	$\rightarrow$	$I_{2/1} = 2$
[$2f$;$3f$] = quinte	$\rightarrow$	$I_{3/2} = 3/2$
[$3f$;$4f$] = quarte	$\rightarrow$	$I_{4/3} = 4/3$
[$4f$;$5f$] = tierce majeure	$\rightarrow$	$I_{5/4} = 5/4$
[$5f$;$6f$] = tierce mineure	$\rightarrow$	$I_{6/5} = 6/5$



Gamme naturelle



Exemples de calcul d'intervalles:



Octave = Quinte + quarte = 3/2*4/3 = 2

Quinte = 3M+3m = *5/4*6/5 = 3/2*

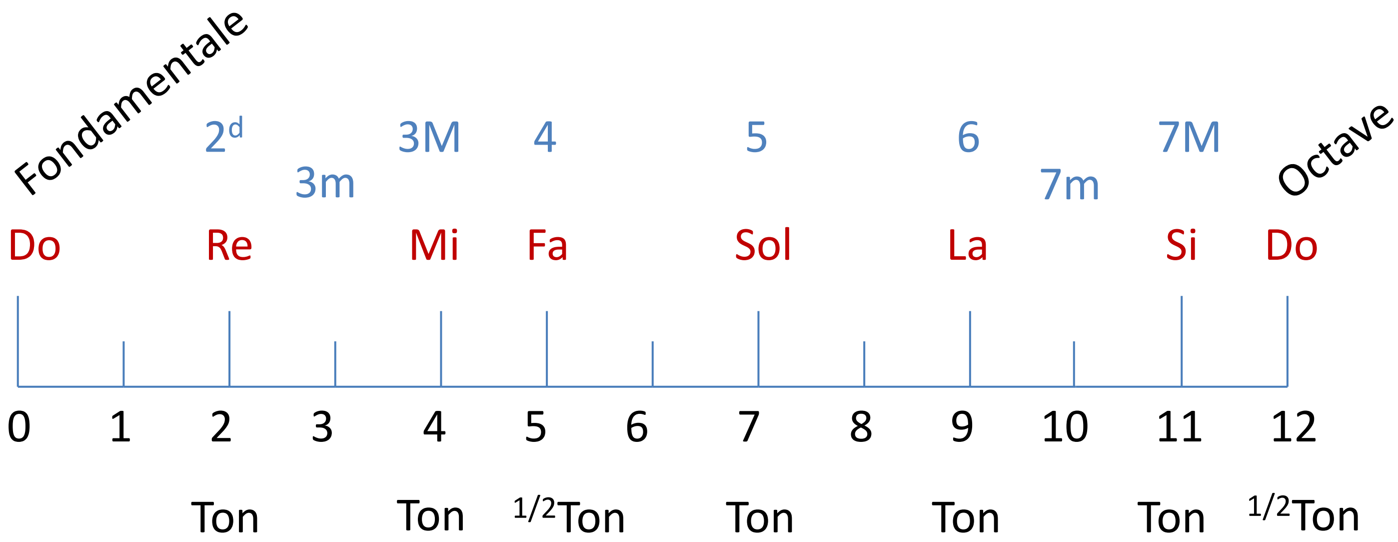
3M= Quinte-3m = (3/2)/(6/5) = 5/4

Quarte = Octave-Quinte = 2/(3/2) = 4/3

Mais le calcul ne marche pas avec toutes les notes de la gamme heptatonique !!!
→ coma syntonique

Nom des intervalles

Gamme heptatonique



Intervalles en gamme naturelles

→ Mise en évidence du coma syntonique

Note	Nom de l'Intervalle	Intervalle
Do	Tonique	1
Ré	Seconde	9/8
	Tierce min.	6/5
Mi	Tierce Maj.	5/4
Fa	Quarte	4/3
Sol	Quinte	3/2
La	Sixte	5/3
	Septième min.	9/5
Si	Septième Maj.	15/8
Do	Octave	2

½ ton =25/24

½ ton =16/15

1 ton =9/8

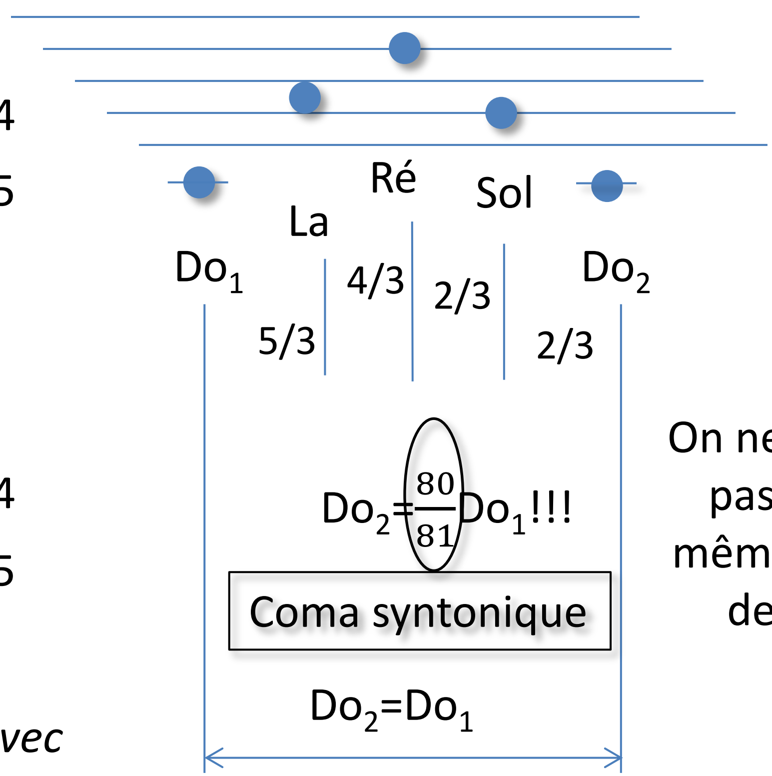
1 ton =10/9

½ ton =25/24

½ ton =16/15

Peut-on construire une gamme avec une telle progression ?

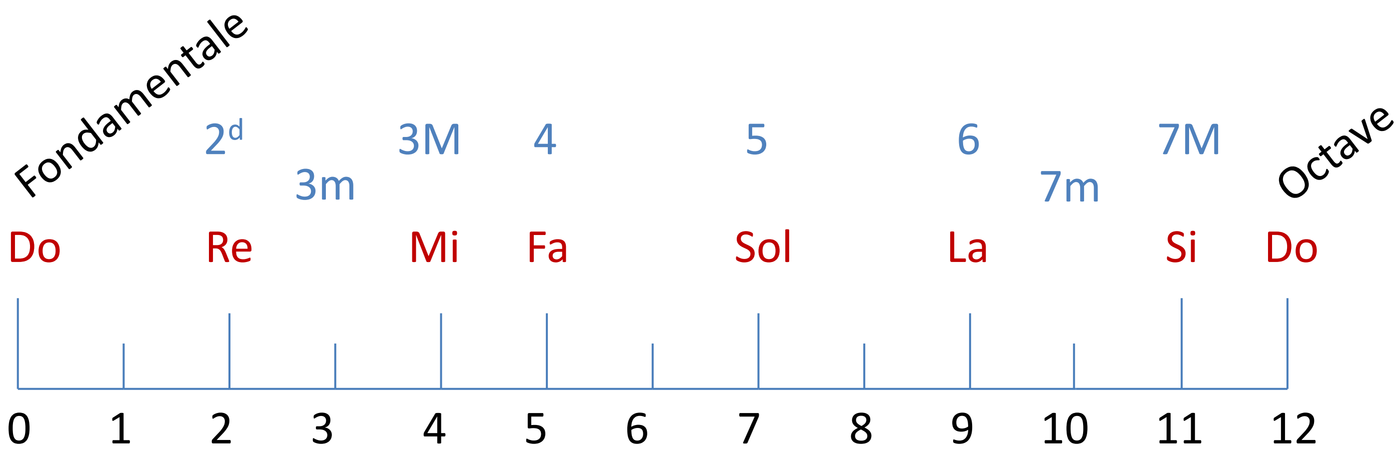
Un exemple illustrant que non…



On ne revient pas sur la même valeur de Do!!

Impossible de construire une gamme avec une progression d'harmoniques pures !!!

Valeur des intervalles en gamme naturelle



Ton	Ton	1/2Ton	Ton	Ton	Ton	1/2Ton
9/8	*10/9*	*16/15*	*9/8*	*10/9*	*9/8*	*16/15*

- 2 valeurs d'intervalle de 1/2ton: $^{16}/_{15} = 1.066$, $^{25}/_{24} = 1.042$
- 2 valeurs d'intervalle pour un ton: $^{9}/_{8} = 1.125$, $^{10}/_{9} = 1.111$

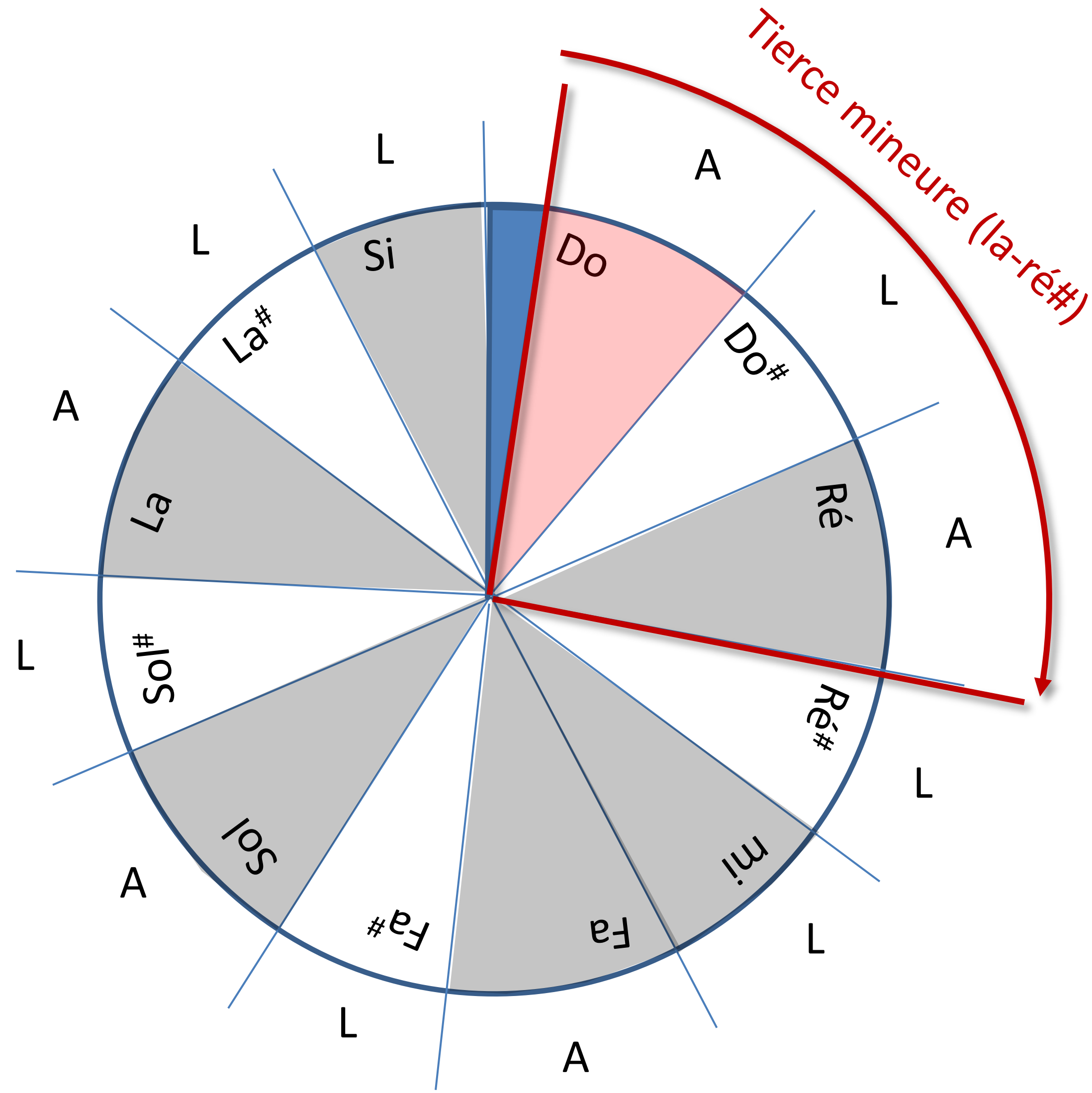
→ **Transposition impossible !!**

- **Coma syntonique** = intervalle entre les deux valeurs possibles d'un ton :

$$\left(\frac{9}{8}\right)/\left(\frac{10}{9}\right) = \left(\frac{81}{80}\right) = 1.0125$$

Le problème de la transposition

- ✓ **Intervalles en do Majeur**



Le problème de la transposition

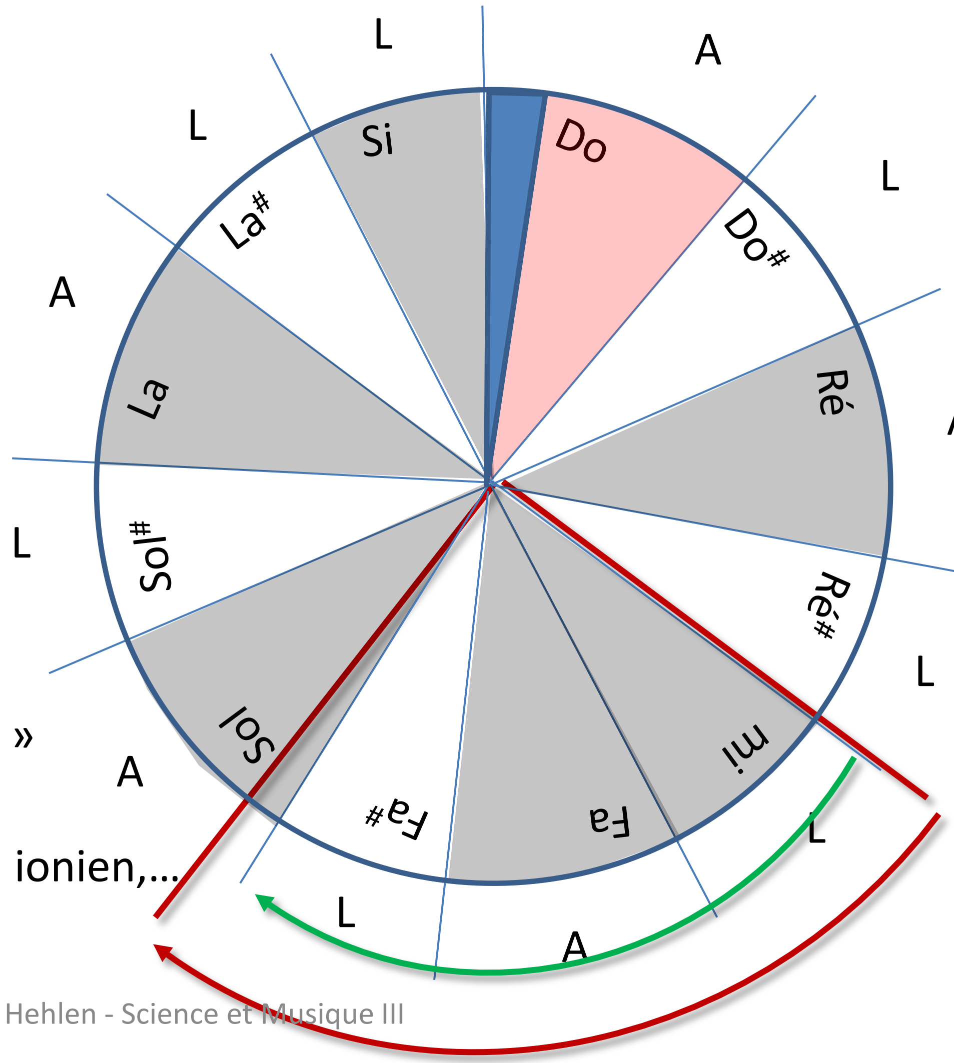
✓ **Intervalles en mi Majeur**

Tierce mineure en mi : L-A-L

≠

Tierce mineure en do : A-L-A

Les intervalles sont différents!



- La transposition change la « couleur » de la succession de notes.
- D'où la définition des modes dorien, ionien,…
- Peut entrainer des dissonances!

A. Calculs d'intervalles naturels:

1. Quelle est l'intervalle entre un Do au 3^{ième} octave et un Do au 2^{d} octave ?

$$f_{02}=4f_0, \quad f_{03}=8f_0 \;\Rightarrow\; f_{03}/f_{02}=2$$

2. Dans la gamme de Zarlino quel est l'intervalle entre la tierce majeure (5/4) et la tierce mineure (6/5) ? Entre la quinte et la quarte.

$$f_{3m}=(6/5)f_0, \quad f_{3M}=(5/4)f_0 \;\Rightarrow\; I_{3M/3m} = f_{3M}/f_{3m} = (5/4)/(6/5) = 25/24$$

3. Retrouver l'intervalle de quinte de la gamme de Zarlino à partir des intervalles de tierce mineure et tierce majeure.

$$I_{Quinte}= I_{3m} \times I_{3M} = (6/5)\times(5/4) = 3/2$$

4. Montrer que la quinte descendante correspond à la quarte de l'octave inférieur.

Quinte descendante : $I_{2/3}=2/3f$

Quarte octave inférieur : $I_{quarte\_inf.}=(4/3)(f/2) = (2/3)f=I_{quinte\_desc.}$

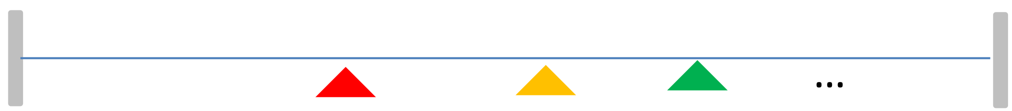
L'échelle Pythagoricienne

L'échelle pythagoricienne est basée sur le cycle des quintes:

Pourquoi les quintes ?

L'intervalle de quinte pure était dans l'antiquité considéré comme le plus consonnant après l'octave de par son rapport numérique simple (3/2) sur le monocorde.

1. Chaque quinte successive à l'ordre $n+1$ est obtenue en prenant les 2/3 de la corde n



$f \times I_{3/2}$

$(f \times I_{3/2}) \times I_{3/2}$

$(f \times I_{3/2} \times I_{3/2}) \times I_{3/2}$

…

$$\Rightarrow \boxed{f_n = f\left(\frac{3}{2}\right)^n}$$

2. On ramène ces 12 notes (quintes) à l'intérieur d'un seul octave

Les termes successifs de la suite sont :

$$\boxed{f_n = \left(\frac{3}{2}\right)^n \times \frac{1}{2^p} f = I_n f}$$

p : Entier (unique) tel que $f_n \in [f, 2f[$

$I_n = \left(\frac{3}{2}\right)^n \times \frac{1}{2^p}$: Intervalle

A. Petit résumé sur la gamme pythagoricienne :

1. Soit un La4 à f=440Hz. Quelle est la fréquence du La4 un octave plus haut (La5), deux octaves plus haut (La6)

2. Soit une fréquence fondamentale f. Donner la fréquence de la quatrième quinte de f dans la série des quintes montantes ($f_{Q4\mathrm{a}}$), descendantes ($f_{Q4\mathrm{d}}$).

3. Que vaut cette fréquence ramenée dans l'octave de f ? Correspond t-elle à un intervalle de gamme naturelle (Zarlino) ?

Réponses :

1. *Soit un La4 à f=440Hz. Quelle est la fréquence du La4 un octave plus haut (La5), deux octaves plus haut (La6)*

$f_n = 2^n f_0 \longrightarrow f_5 = 2^1 f_4 = 880$ Hz $\qquad f_6 = 2^2 f_4 = 1760$ Hz

2. Soit une fréquence fondamentale f. Donner la fréquence f_{Q4} de la quatrième quinte de f dans la série des quintes ascendantes, descendantes

Ascendante : $f_{Qn} = f_0 \left(\frac{3}{2}\right)^n$ $\qquad f_{Q4a} = f_0 \left(\frac{3}{2}\right)^4 = \frac{81}{16} f_0 = 5.0624 \times f_0$

Descendante : $f_{Qn} = f_0 \left(\frac{2}{3}\right)^n$ $\qquad f_{Q4d} = f_0 \left(\frac{2}{3}\right)^4 = \frac{16}{81} f_0 = 0.1975 \times f_0$

3. Que valles ces fréquences ramenées dans l'octave de f ? Correspondent-elles à un intervalle de la gamme naturelle?

Note ramenée à l'octave

$$f_{4a} = f_0 \left(\frac{3}{2}\right)^4 \frac{1}{2^2} f_0 = \frac{81}{64} f_0 = 1.2656 \times f_0$$

$$f_{4d} = f_0 \left(\frac{2}{3}\right)^4 2^3 f_0 = \frac{128}{81} f_0 = 1.5802 \times f_0$$

Proche d'une Tierce Maj. naturelle :

$$f_{3M} = \frac{5}{4} f_0 = \frac{80}{64} f_0 = 1.25 \times f_0 \approx f_{4a}$$

f_{4d} *entre* $\frac{3}{2} f_0$ *et* $\frac{5}{3} f_0$ (entre Quinte et sixte naturelles)

Correspond au La^b Pythagoricien

Combien de notes dans un octave ?

$$f_n = \left(\frac{3}{2}\right)^n \times \frac{1}{2^p} f$$

Il faut trouver *n* et *p* tels que le produit $\left(\frac{3}{2}\right)^n \times \frac{1}{2^p} = 2 \rightarrow$ impossible!!!

➡ **Le nombre de notes par octave est arbitraire (idem Zarlino)**

✓ **Nombre de quintes *n* qui bouclent « à peu près » l'octave :**

$$\boxed{(3/2)^n \cong 2^{p+1}} \quad \rightarrow \quad n = 5,\ 7,\ 12,\ 41,\ 53, \ldots.$$

1. Gamme Pentatonique (*n*=5 notes) :

Succession de 5 quintes $\left(\frac{3}{2}\right)^n$

Intervalle d'octave

5ème quinte ramenée à l'octave $\frac{\left(\frac{3}{2}\right)^5}{2^3} = 1.898 \approx 2$

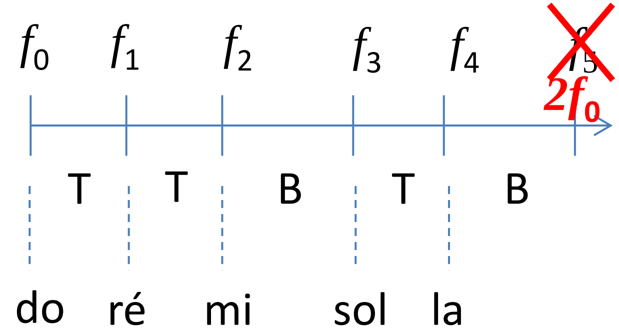
Mais il reste un *manque* d'intervalle de $2f_0/f_5$=2/1.898 = 1.054 (comma descendant)

Construction de la gamme pentatonique (n=5)

(Gamme « chinoise »)

Quinte n	0	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*
Intervalle I	1	3/2	$3^2/2^2$	$3^3/2^3$	$3^4/2^4$	$3^5/2^5$
I ramené à l'octave	**1**	**3/2**	**9/8**	**27/16**	**81/64**	**243/128**
	1	1,5	1,125	1,687	1,266	~~1.898~~ **2**
Suite des notes (f_i)	0	f_3	f_1	f_4	f_2	~~f_5~~ $2f_0$
	do	**sol**	**Ré**	**la**	**mi**	**do2**

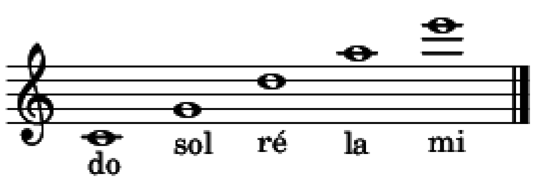
Plus proche d'un Si que d'un Do2!!



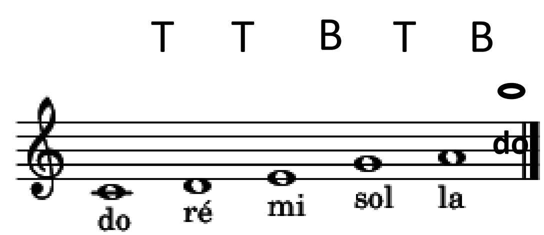
- **Tempérament:**

- Intervalles : $\mathrm{T} = \frac{f_1}{f_0} = \cdots = \frac{3^2}{2^3} = 1.125$, $\mathrm{B} = \frac{f_3}{f_2} = \frac{2f_0}{f_4} = \frac{2^5}{3^3} = 1.185$

- On retrouve la structure - mais pas les valeurs - des intervalles de la **gamme pentatonique** occidentale



ou



2. Gamme heptatonique dite « Pythagoricienne » (n=7 notes) :

Succession de 7 quintes $\left(\frac{3}{2}\right)^n$

7ème quinte ramenée à l'octave $\frac{\left(\frac{3}{2}\right)^7}{2^3} = 2.1357 \approx 2$

Mais on a un *surplus* d'intervalle de $f_7/2f_0$=2.135/2= 1.067 (comma ascendant)

La 5ème quinte est proche d'un Si

la quarte juste (Fa) se substitue à la 6ème quinte

$n =$	0	2	4	(6)	1	3	5	7
Note	do	ré	mi	$\boxed{\text{fa}}$	sol	la	$\boxed{\text{si}}$	do2
fréquence	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	~~f_7~~ $2f_0$
Rapport	1/1	9/8	81/64	4/3	3/2	27/16	243/128	2187/1024
	1	1.125	1.266	1.33	1.5	1.687	1.898	~~2.135~~ 2
Ecarts	T	T	L	T	T	T	L	

➢ **Tempérament :**

- Intervalles $\text{T} = \frac{f_1}{f_0} = \cdots = \frac{3^2}{2^3} = 1.125$, $\text{L} = \frac{f_3}{f_2} = \frac{2f_0}{f_6} = \frac{2^5}{3^3} = 1.0535$

- On retrouve la structure - mais pas les valeurs - des intervalles de la **gamme majeure** occidentale

3. Gamme occidentale moderne à n=12 notes :

$\rightarrow$ En tempérament de Pythagore

Succession de 12 quintes $\left(\frac{3}{2}\right)^n$

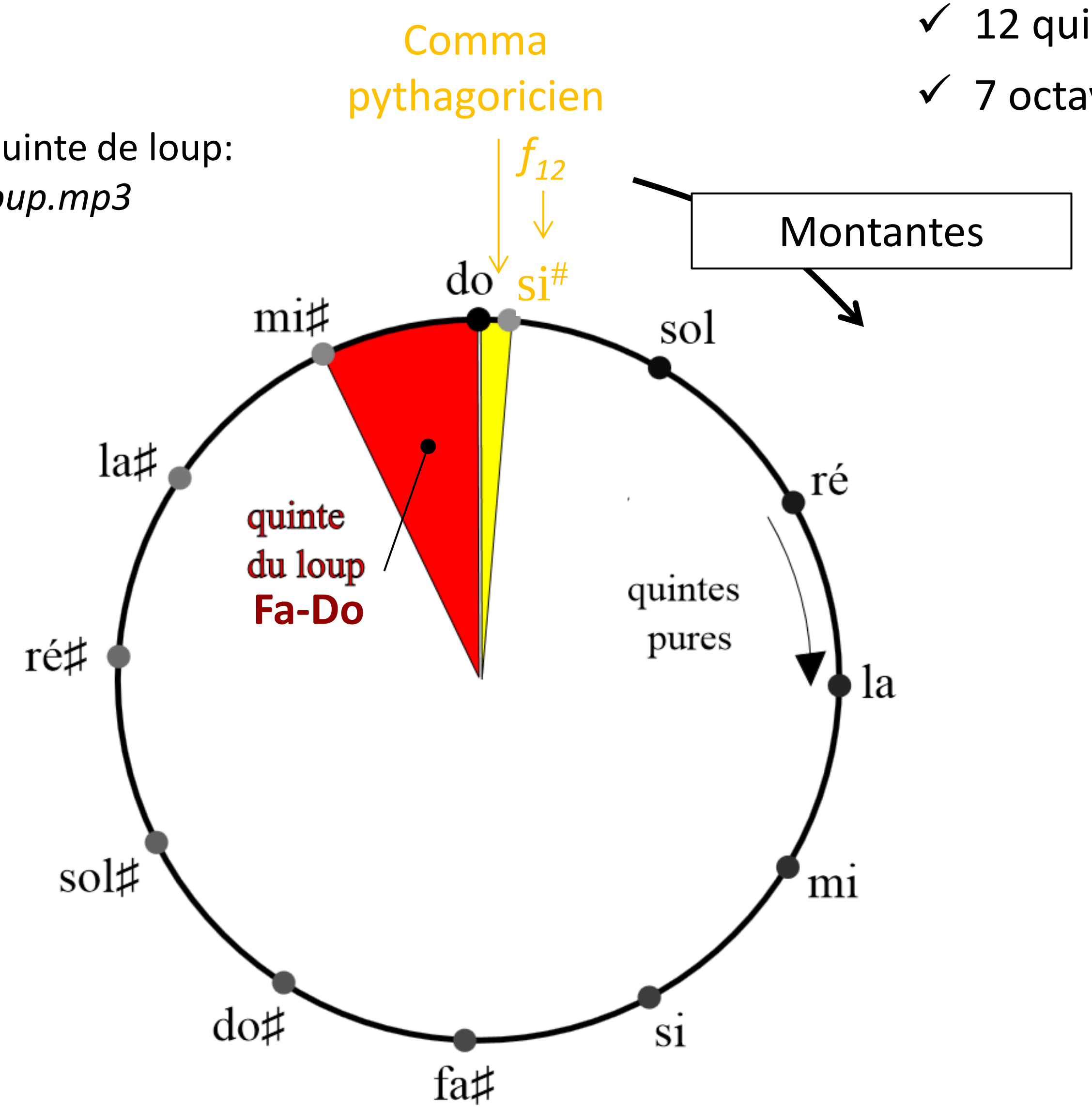
12ème quinte ramenée à l'octave $\frac{\left(\frac{3}{2}\right)^{12}}{2^7} f_0 = 2.027 f_0 \approx 2 f_0$

Il reste un *surplus* d'intervalle de $f_{12}/2f_0$=2.027/2 = 1.013 (comma ascendant)

Cycle des quintes en représentation circulaire (n=12)

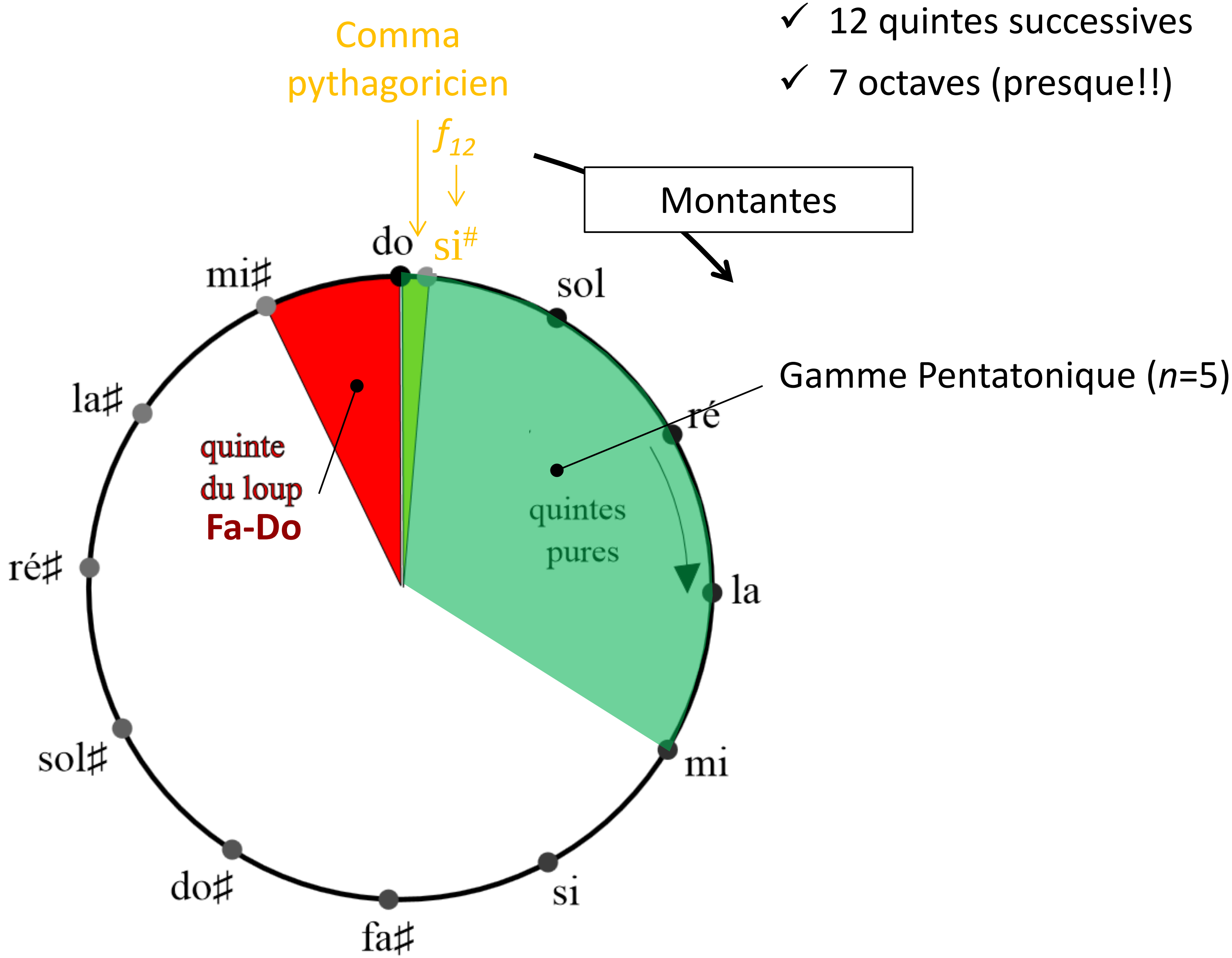
- ✓ 12 quintes successives
- ✓ 7 octaves (presque!!)

Ecouter la quinte de loup:
Quinte de loup.mp3



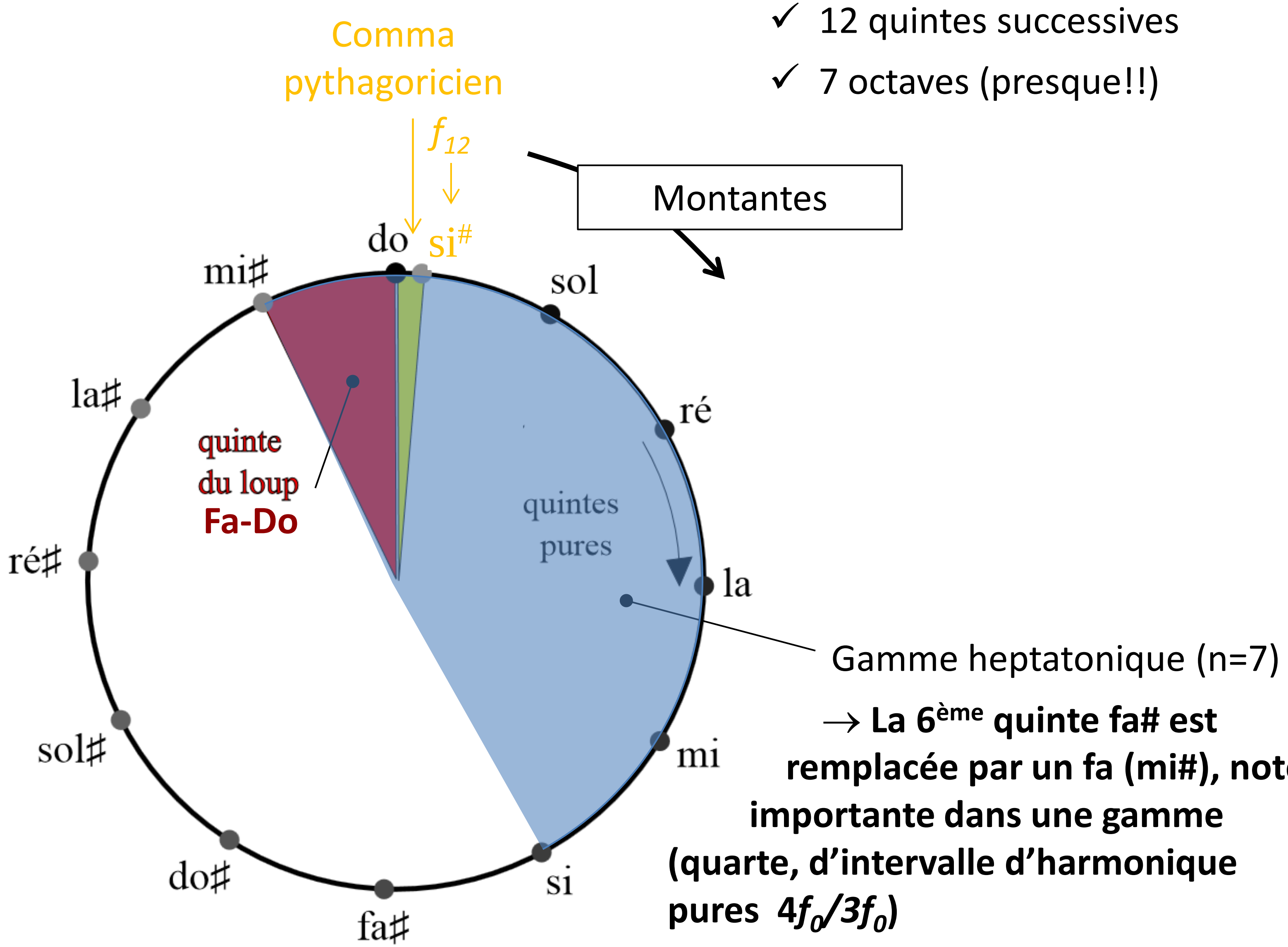
Cycle des quintes en représentation circulaire (n=12)

- ✓ 12 quintes successives
- ✓ 7 octaves (presque!!)



Cycle des quintes en représentation circulaire (n=12)

- ✓ 12 quintes successives
- ✓ 7 octaves (presque!!)



→ **La 6ème quinte fa# est remplacée par un fa (mi#), note importante dans une gamme (quarte, d'intervalle d'harmonique pures $4f_0/3f_0$)**

Le cycle des quintes:

fondamentale

Quintes

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	**12**
Rapports	1	$3/2$	$3^2/2^2$	$3^3/2^3$	$3^4/2^4$	$3^5/2^5$	$3^6/2^6$	$3^7/2^7$	$3^8/2^8$	$3^9/2^9$	$3^{10}/2^{10}$	$3^{11}/2^{11}$	$\mathbf{3^{12}/2^{12}}$
Rapports ramené à l'octave	1	$3/2$	$3^2/2^3$	$3^3/2^4$	$3^4/2^6$	$3^5/2^7$	$3^6/2^9$	$3^7/2^{11}$	$3^8/2^{12}$	$3^9/2^{14}$	$3^{10}/2^{15}$	$3^{11}/2^{17}$	$\mathbf{3^{12}/2^{18}}$
	1	1,5	≈ 1,13	≈ 1,69	≈ 1,27	≈ 1,90	≈ 1,43	≈ 1,07	≈ 1,60	≈ 1,20	≈ 1,80	≈ 1,35	**≈ 2,027**
Ordre croissant des rapports	0	7	2	9	4	11	6	1	8	3	10	5	**12**

=2 pour que ça boucle !

- ✓ **Rapport entre deux notes successives (1/2 tons):**

1 – 2 3 – 4 ,... $\rightarrow \mathrm{L} = \frac{f_2}{f_1} = \frac{2^8}{3^5} = 1.0535$ *(Limma)*

2 – 3 4 – 5 ,... $\rightarrow \mathrm{A} = \frac{f_5}{f4} = \frac{3^7}{2^{11}} = 1.0679$ *(Apotome)*

➡ 2 intervalles possibles pour les ½ tons !

- ✓ **Le ton: deux ½ tons successifs :**

1 – 3 ,... $\rightarrow T = \frac{f_{i+2}}{f_i} = \frac{9}{8}$ ➡ 1 seul intervalle possible

Nom des notes de l’échelle chromatique **ascendante**

	0	7	2	9	4	11	6	1	8	3	10	5	**12**
Rapports ramenés à l’octave	1	$3^7/2^{11}$	$3^2/2^3$	$3^9/2^{14}$	$3^4/2^6$	$3^{11}/2^{17}$	$3^6/2^9$	$3/2$	$3^8/2^{12}$	$3^3/2^4$	$3^{10}/2^{15}$	$3^5/2^7$	**2**
Noms	do 1	do♯	ré	ré♯	mi	fa	fa♯	sol	sol♯	la	la♯	si	**do 2**

Ecarts : A L A L A L L A L A L L

Comma de Pythagore A/L = $\frac{3^{12}}{2^{19}} = 1.0136\ (1.3\%)$

Limma : L

Apotome : A

$\equiv$ *Écart entre le do$_2$ ramené à l’octave et le do$_1$!!*

✓ **Remarque :** Tierce Majeure (2 tons, soit intervalle do-mi) pythagoricienne a pour rapport ${}^{3^4}/_{2^6} = {}^{81}/_{64}$ $\neq$ Tierce Majeure pure ${}^{5}/_{4} = {}^{80}/_{64}$

Comma syntonique : ${}^{81}/_{80} = 1.0125\ (1.25\%)$

Nom des notes de l'échelle chromatique **ascendante :**

Quinte de loup

	0	7	**2**	9	**4**	**11**	6	**1**	8	**3**	10	**5**	**12**
Rapports ramenés à l'octave →	**1**	$3^7/2^{11}$	**9/8**	$3^9/2^{14}$	**81/64**	$3^{11}/2^{17}$	$3^6/2^9$	**3/2**	$3^8/2^{12}$	**27/16**	$3^{10}/2^{15}$	**243/128**	**2**
Ecarts →	A	L	A	L	A	L	L	A	L	A	L	L	
Noms →	**do**	do♯	**ré**	ré♯	**mi**	**fa**	fa♯	**sol**	sol♯	**la**	la♯	**si**	**do**

La quarte n'est pas juste (≠ $4/3f$)

- Tempérament Pythagore
  → **Intervalle Fa-Do$_2$** = $2/(3^{11}/2^{17})=2^{18}/3^{11}=1.479$ au lieu de 3/2

- Tempérament naturel :
  → **Intervalle Ré-La** = $(5/3)/(9/8)=1.481$ au lieu de 3/2

Ecouter les gammes et la quinte de loup : http://people.irisa.fr/Francois.Schwarzentruber/gammes/

Nom des notes de l'échelle chromatique **ascendante**

	0	7	**2**	9	**4**	**11**	6	**1**	8	**3**	10	**5**	**12**
Rapports ramenés à l'octave →	**1**	$3^7/2^{11}$	**9/8**	$3^9/2^{14}$	**81/64**	$\cancel{3^{11}/2^{17}}$ **4/3**	$3^6/2^9$	**3/2**	$3^8/2^{12}$	**27/16**	$3^{10}/2^{15}$	**243/128**	**2**
Ecarts →	A	L	A	L	L	A	L	A	L	A	L	L	
Noms →	**do**	do♯	**ré**	ré♯	**mi**	**fa**	fa♯	**sol**	sol♯	**la**	la♯	**si**	**do**

→ On remplace la quarte pythagoricienne par une quarte juste : $\frac{4}{3}f$

- L'intervalle généré est le comma pythagoricien : $\frac{\frac{3^{11}}{2^{17}}}{\frac{4}{3}} = \frac{3^{12}}{2^{19}}$

- Les écarts sont toujours des Apotomes et des Limmas

- La quinte de loup est déplacée vers un endroit moins utilisé dans la gamme : Si^b-Fa

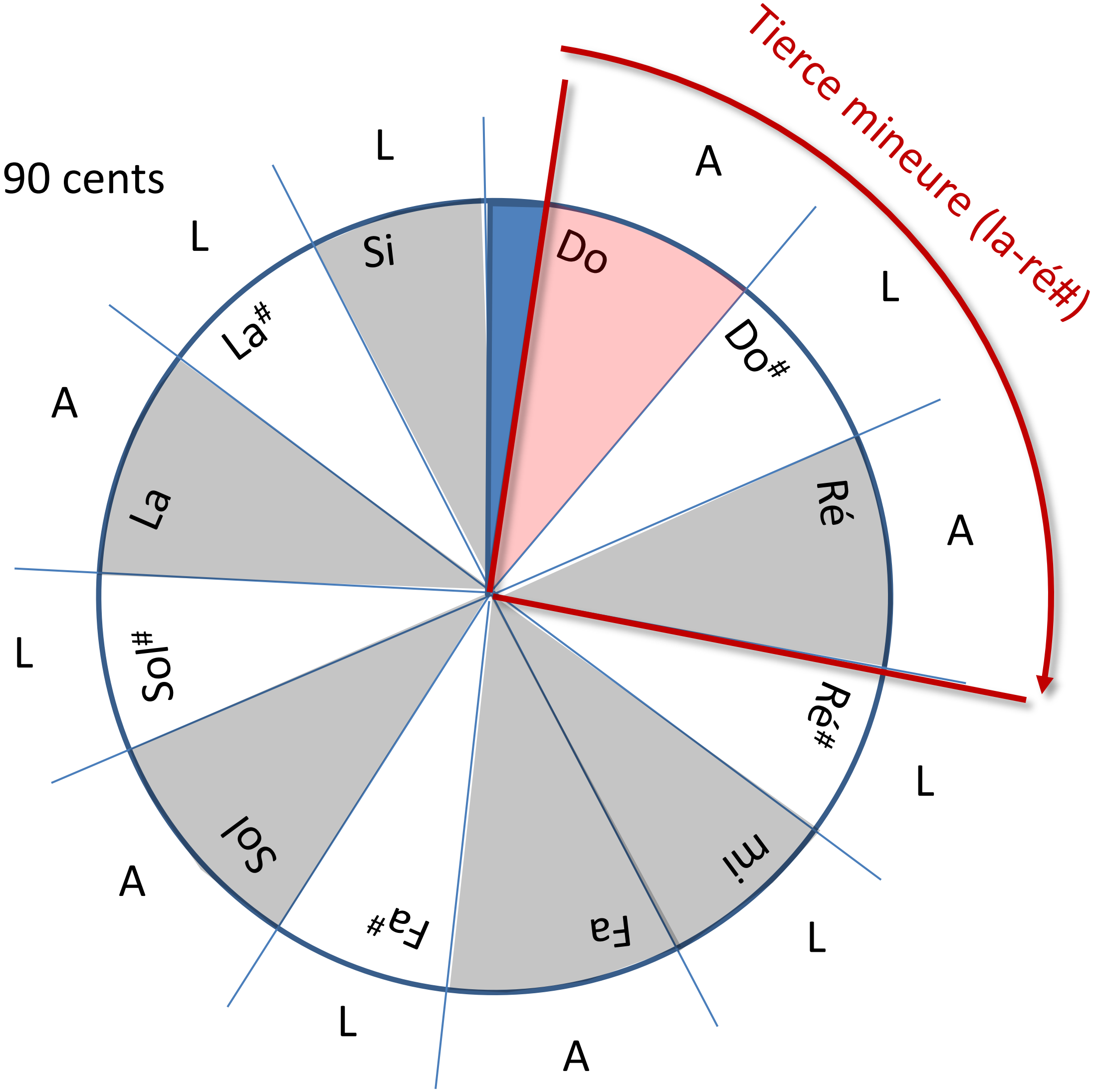
Le problème de la transposition

✓ **Intervalles en do Majeur**

Limma ≅ 90 cents

Apotome ≅ 114 cents

Tierce mineure : A-L-A



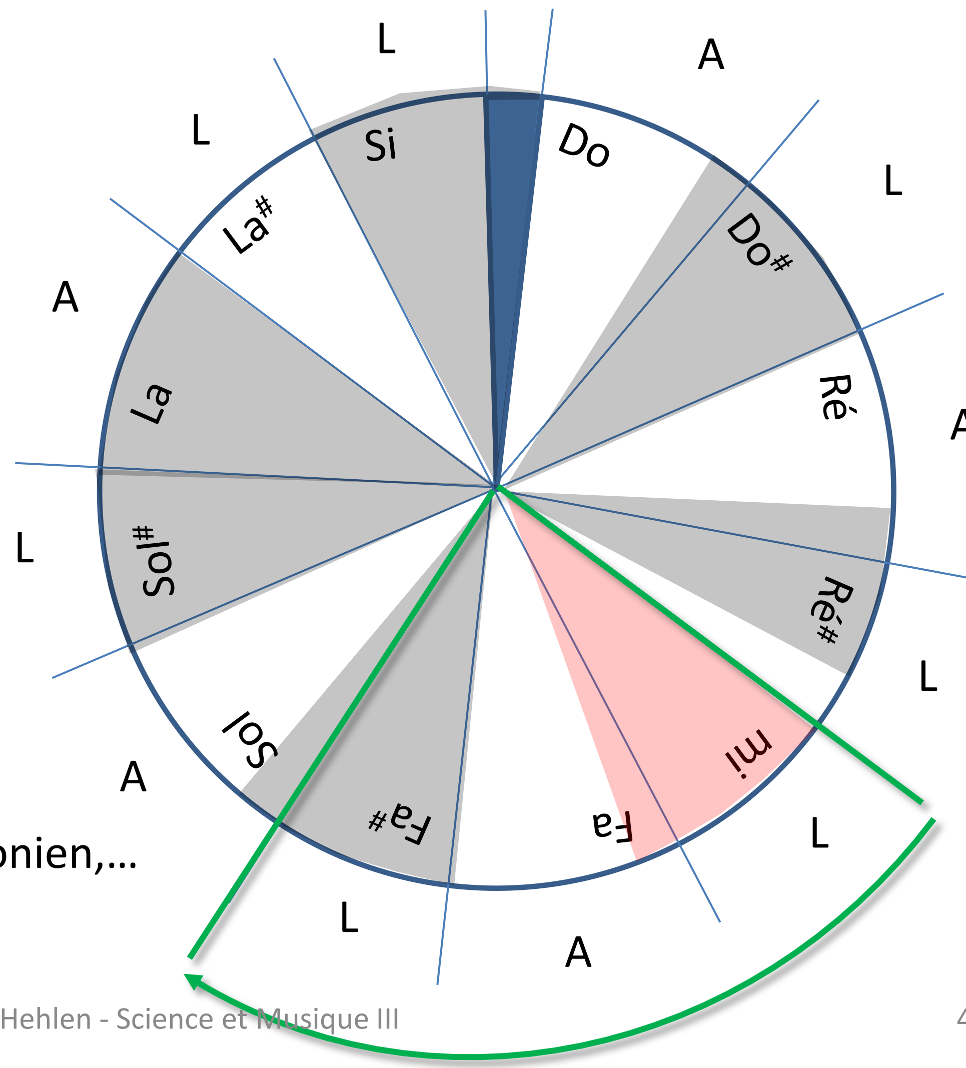
La Transposition

Gamme de pythagore

✓ **Intervalles en mi Majeur**

Tierce mineure en mi : L-A-L
≠
Tierce mineure en do : A-L-A

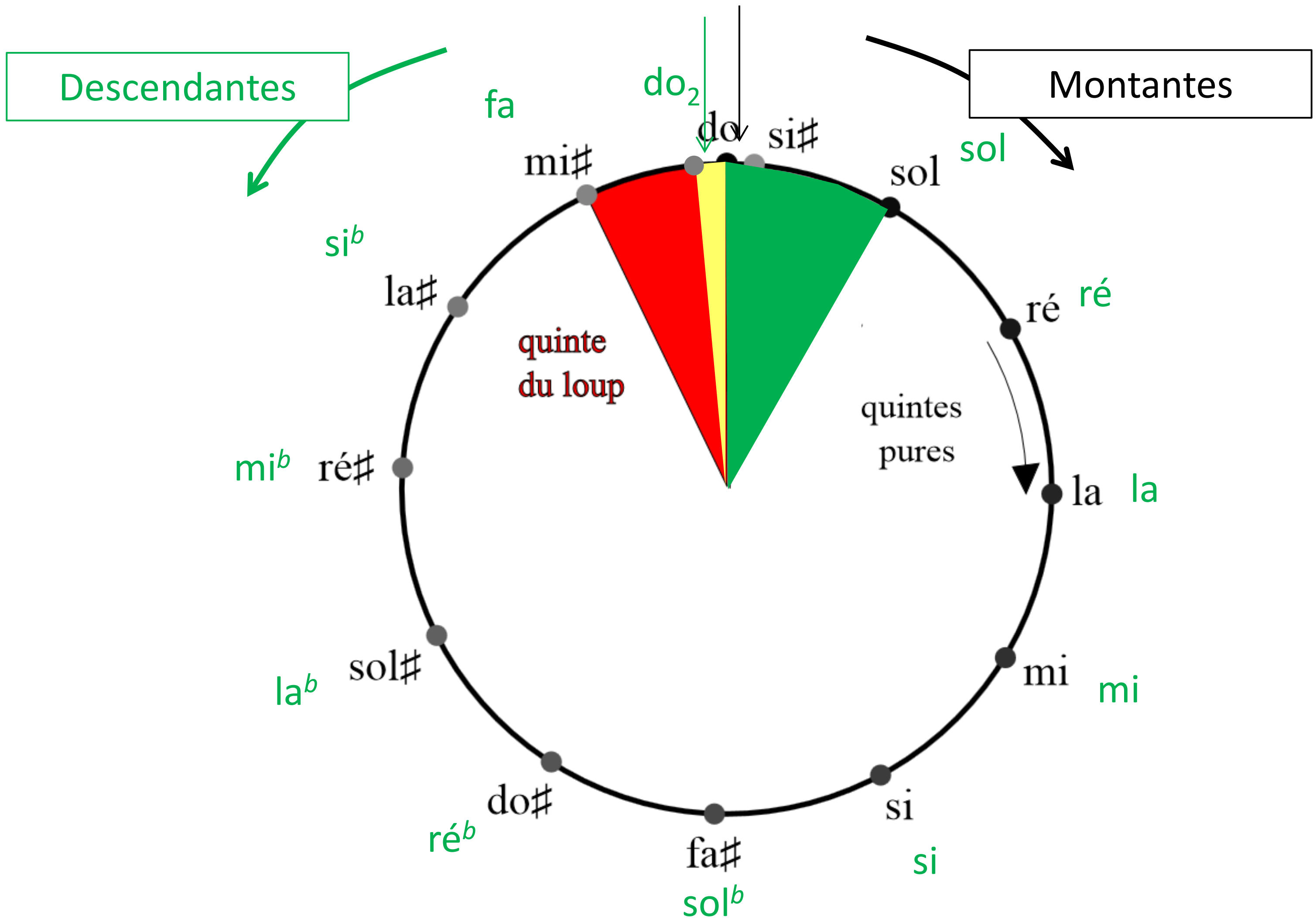
Les intervalles sont différents!



- La transposition change la « couleur » de la succession de notes.
- D'où la définition des modes dorien, ionien,…
- Peut entrainer des dissonances!

Cycle des quintes en représentation circulaire

- ✓ 12 quintes successives
- ✓ 7 octaves (presque!!)



Les dièses et les bémols

Les Bémols: Intervalles **descendants**

$$I_n = \left(\frac{2}{3}\right)^n \times 2^p$$

$n=$	0	5	10	3	8	1	6	11	4	9	2	7	**12**
	1	$2^8/3^5$	$2^{16}/3^{10}$	$2^5/3^3$	$2^{13}/3^8$	$2^2/3^1$	$2^{10}/3^6$	$2^{18}/3^{11}$	$2^7/3^4$	$2^{17}/3^9$	$2^4/3^2$	$2^{12}/3^7$	$\mathbf{2^{20}/3^{12}}$
	1	1.053	1.110	1.185	1.248	1.333	1.405	1.480	1.580	1.665	1.778	1.873	~~1.973~~ **2**
	Do	Re^b	Re	Mi^b	Mi	Fa	Sol^b	Sol	La^b	La	Si^b	Si	**Do**

Ordre des **bémols** : Si Mi La Re Sol Do Fa

$$I_n = \left(\frac{3}{2}\right)^n \times \frac{1}{2^p}$$

Les dièses : Intervalles **ascendants**

$n=$	0	7	2	9	4	11	6	1	8	3	10	5	**12**
	Do	$\text{Do}^\#$	Re	$\text{Re}^\#$	Mi	Fa	$\text{Fa}^\#$	Sol	$\text{Sol}^\#$	La	$\text{La}^\#$	Si	**Do**
	1	1.0678	1.125	1.201	1.265	1.351	1.424	1.500	1.602	1.687	1.802	1.898	~~2.027~~ **2**

Ordre des **dièses** : Fa Do Sol Re La Mi Si

Les dièses et les bémols

Les Bémols: Intervalles **descendants**

$n=$	0	5	10	3	8	1	6	11	4	9	2	7	**12**
	1	$2^8/3^5$	$2^{16}/3^{10}$	$2^5/3^3$	$2^{13}/3^8$	$2^2/3^1$	$2^{10}/3^6$	$2^{18}/3^{11}$	$2^7/3^4$	$2^{17}/3^9$	$2^4/3^2$	$2^{12}/3^7$	$\mathbf{2^{20}/3^{12}}$
	1	1.053	1.110	1.185	1.248	1.333	1.405	1.480	1.580	1.665	1.778	1.873	~~1.973~~ **2**
	Do	Re^b	Re	Mi^b	Mi	Fa	Sol^b	Sol	La^b	La	Si^b	Si	**Do**

Les dièses : Intervalles **ascendants**

$n=$	0	7	2	9	4	11	6	1	8	3	10	5	**12**
	Do	$Do^\#$	Re	$Re^\#$	Mi	Fa	$Fa^\#$	Sol	$Sol^\#$	La	$La^\#$	Si	**Do**
	1	1.0678	1.125	1.201	1.265	1.351	1.424	1.500	1.602	1.687	1.802	1.898	~~2.027~~ **2**

$$\frac{(Note^{\#})_{asc.}}{(Noteb)_{desc.}} = \frac{3^{12}}{2^{19}} = 1.013$$ = Comma de Pythagore!!

1. Calculer l’intervalle de la 9ème quinte ascendante ramenée à l’octave.

2. Calculer l’intevalle de la 3ème quinte descendante ramenée à l’octave

3. Calculer l’intervalle de tierce mineure en gamme naturelle (cf. tableau).

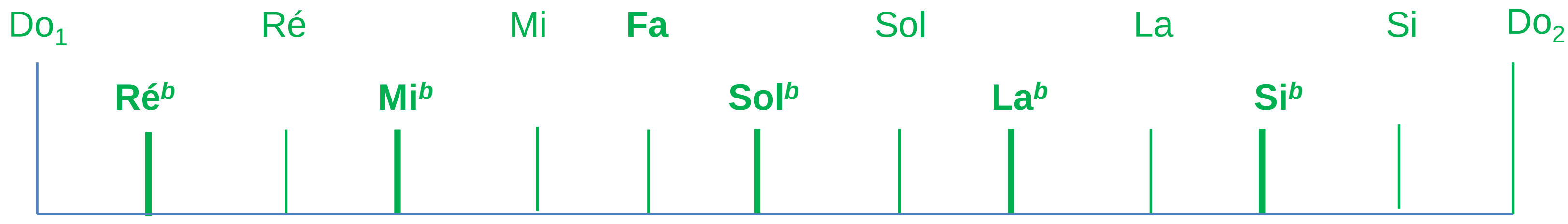
4. Si la tonique est un Do à f=261,63 Hz. Quelle est la fréquence de la note calculée en 1 ?, en 2?, en 3 ? A quelle note cela correspond t-il (cf. Piano cours Math) ?

5. Même question si la tonique est un Fa à 349,23 Hz.

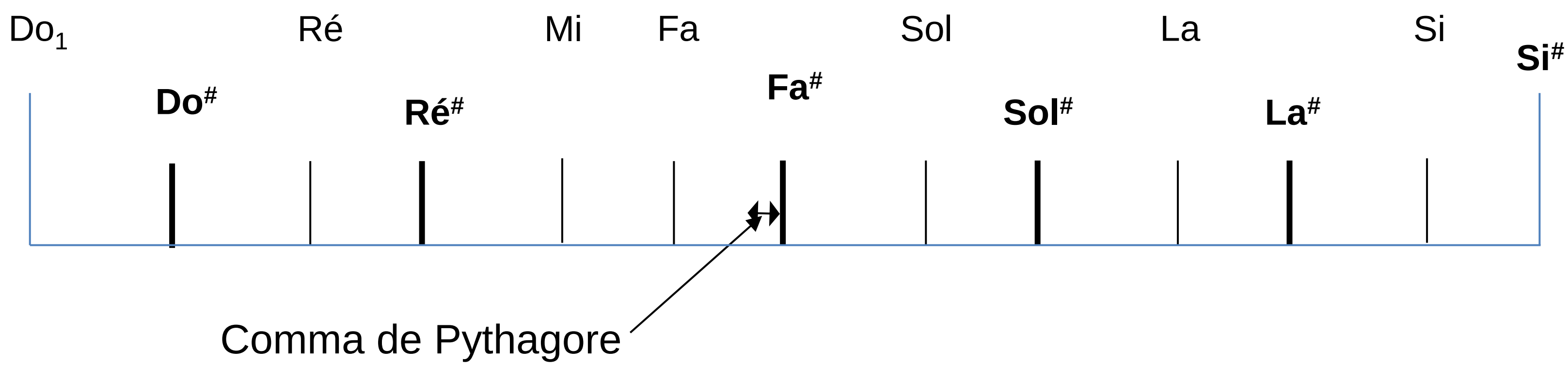
Dièses et bémols

Constructions de la gamme de Pythagore : les différents intervalles sont engendrées par des rapports de quintes juste $f_2 / f_1 = 3/2$ (ascendant) ou 2/3 (descendant) rapportées à l'octave.

✓ A partir des quintes descendantes **(définitions des bémols)**



✓ A partir des quintes ascendantes **(définition des dièses)**



B. Petit résumé sur les dièses et les bemols :

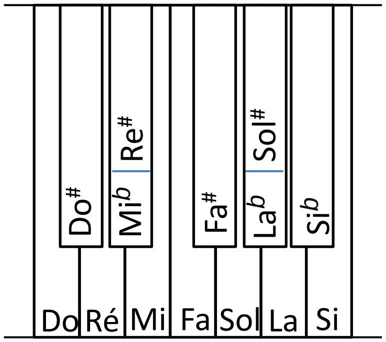
1. A quelle note pythagoricienne correspond la fréquence $f_{4\mathrm{d}}$ calculée dans le *résumé sur les intervalles* ?

2. Calculer la fréquence de la note diésée correspondante (n=8). En déduire que dièses et bémols sont séparés par un intervalle appelé comma pythagoricien.

✓ Feintes brisées du clavecin (avant l'avènement du tempérament égal) :

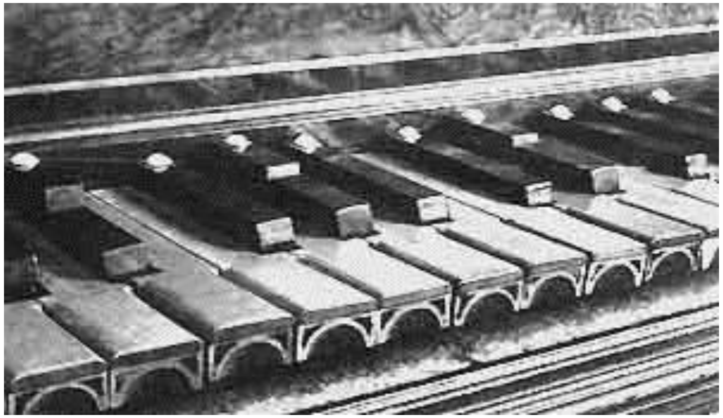
(XVIème et XVIIème siècle)

Pour faire entendre les dièses et les bémols



Octaves comportant 19 touches et plus, jusqu'à à 31 touches!!

Injouable! Et que dire des accords….



Feintes brisées de l'orgue San Petronio de Bologne

Retour à la Gamme naturelle (Zarlino)

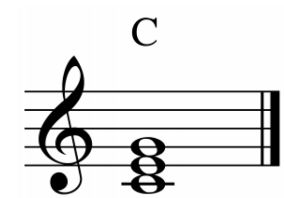
Accord parfait majeur

3 sons *différents* faisant intervenir les premières harmoniques de la série

Fondamentale Quinte Tierce Maj.

Harmoniques pures → $\boldsymbol{f}$, $2f$, $\boldsymbol{3f}$, $4f$, $\boldsymbol{5f}$ *e.g.* do, mi, sol

f $\quad \frac{3}{2}f$ $\quad \frac{5}{4}f$



Mais la tierce Maj. juste n'apparait pas dans la gamme de Pythagore :

$$\boxed{\frac{5}{4}f \neq \frac{81}{64}f}$$

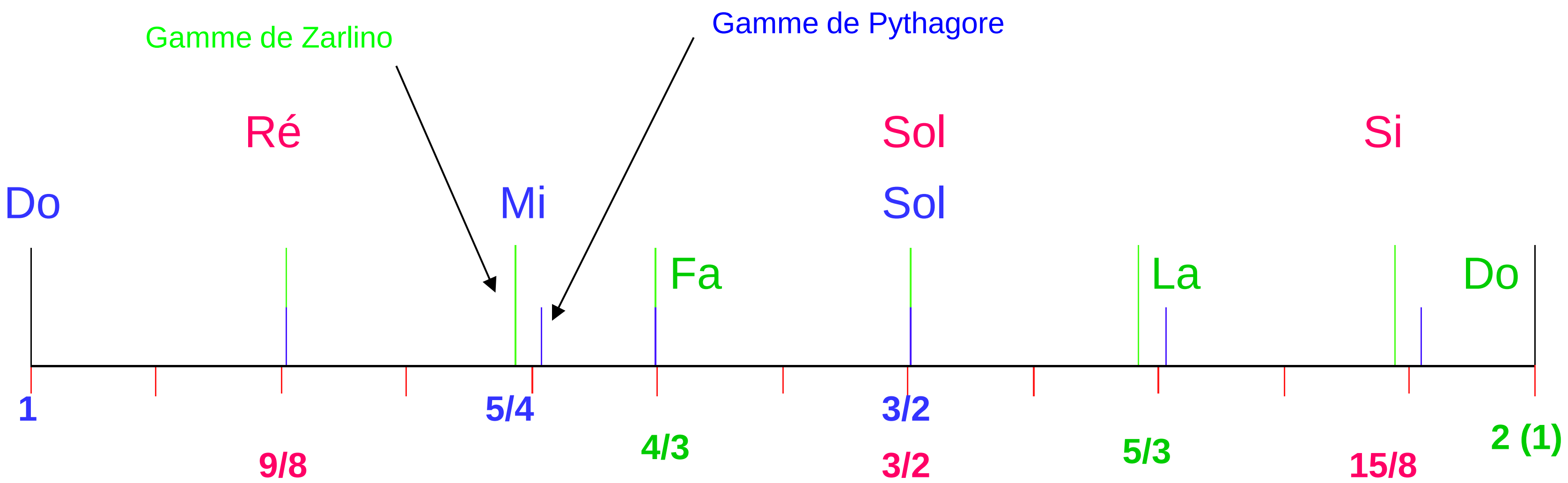
L'écart est le comma *syntonique* : $\frac{81}{64} \div \frac{5}{4} = \frac{81}{80} = 1.0125$

3M pure 3M Pythagore (quintes)

Comment concilier gamme et polyphonie ?!

Retour à la Gamme naturelle (Zarlino)

- ✓ Privilégie l'accord parfait Majeur {Do mi sol} , {fa la do}, {Sol si ré}
- ✓ les différents intervalles sont engendrées par les harmoniques de quinte (3) et de tierce (5)



Gamme dite « naturelle » car fondée sur les harmoniques naturelles

- ✓ Avantage : justesse des accords majeurs parfaits quelle que soit la tonalité.
- ✓ **Inconvenients** : 2 valeurs d'intervalles: Intervalle Do-Ré ≠ intervalle Ré-Mi !!!

⇒ A part l'aspect mathématiquement esthétique des fractions simples, cette gamme sonne faux, on ne peut pas construire simplement les notes chromatiques et la transposition est quasi impossible…

Du tempérament inégal à égal
(un peu d'histoire)

Adoucir les dissonances (il faut chasser le loup!) , permettre la transposition et la polyphonie sur les instruments à tempérament fixe (claviers, guitare,..)

Les tempéraments inégaux ou **mésotoniques** ont été imaginés au **XVII$^{\text{ième}}$ siècle** afin de limiter au mieux les dissonances. Ils repartissent des fractions de commas dans la gamme pour :

1. améliorer la qualité des tierces
2. atténuer la quinte du loup
3. fausser au minimum les quintes
4. étendre les possibilités de modulation et du jeu d'accords

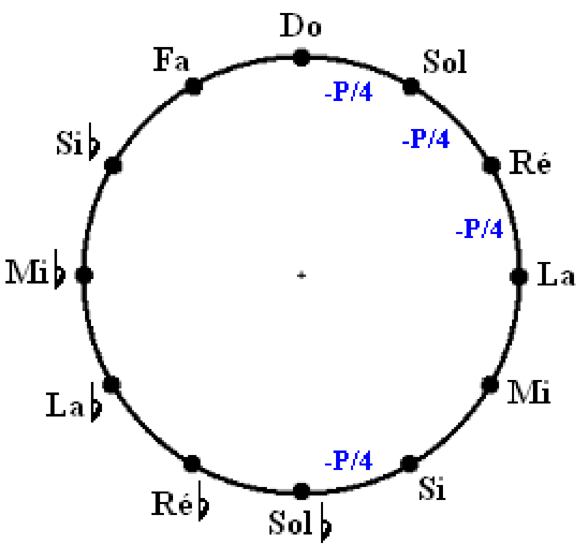
https://fr.wikipedia.org/wiki/Tempérament_inégal
http://organ-au-logis.pagesperso-orange.fr/Pages/Temperam.htm

Pour écouter des œuvres jouées avec un accordage en tempéraments mésotoniques :

http://organ-au-logis.pagesperso-orange.fr/Pages/Temperam.htm

Andreas Werckmeister (1645-1706) :

Il publia dans ses ouvrages Musicalische Temperatur (1686-87) et Hypomnemata musica (1697) des gammes diminuant au maximum la différence d'écart entre les notes sans la supprimer dans le but de conserver la particularité de chaque ton.



WERCKMEISTER III

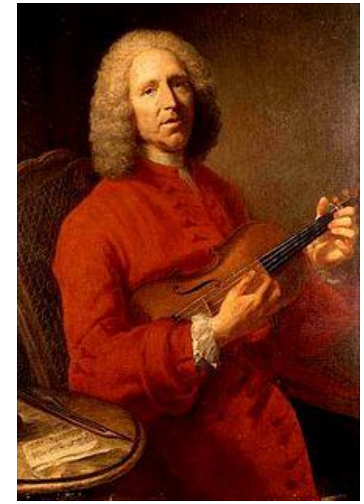
✓ Le comma pythagoricien (**P**) est réparti part quarts sur quatre quintes qui deviennent de fait un peu courtes :

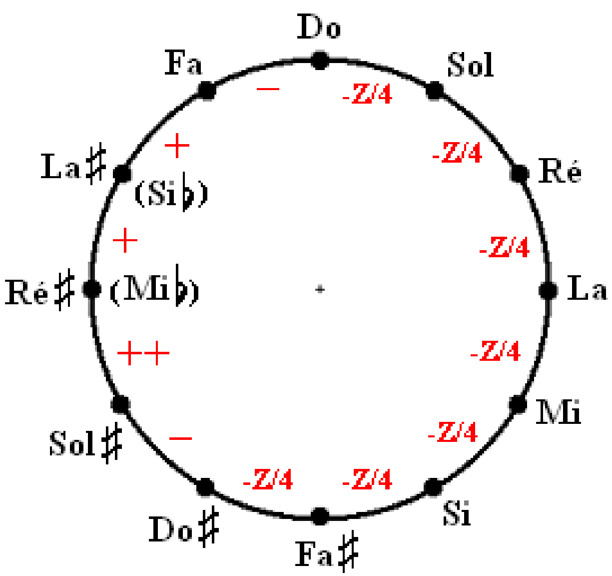
→ Tierce Do-Mi et Fa-La proches de la pureté

→ Quinte tempérée Si-Sol^{b} favorise les tonalités bémols

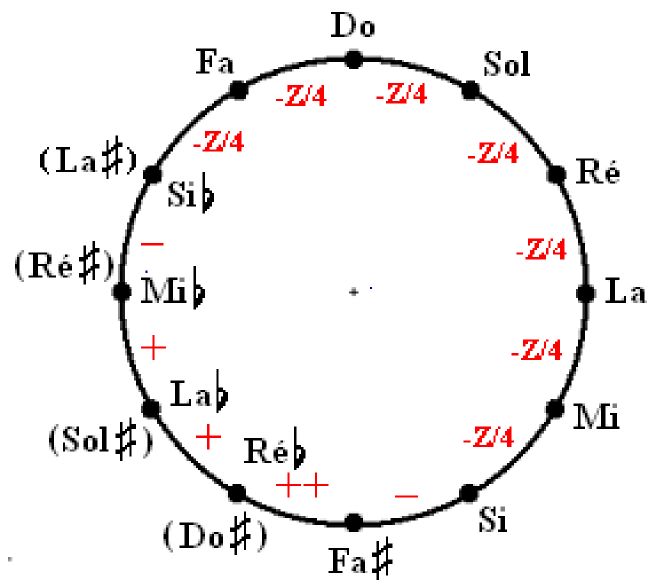
Jean Philippe Rameau (1683-1764) :

décrit la façon d'établir de nouveau tempéraments dans son traité *« Nouveau système de musique théorique » (1726)*





RAMEAU (UT)



RAMEAU (SI♭)

✓ Il redistribue les écarts en fraction de coma de Zarlino(**Z**), et de quintes un peu élargies (+ et + +) ou rétrécies (–)

→ Certains *#* et *b* deviennent confondus

→ Six tierces pratiquement pures

Passages essentiels du texte de Rameau dans son traité « *Nouveau système de musique théorique » (1726)*

"Puisque MI, qui fait la quatrième quinte après UT, ...surpasse d'un comma majeur le MI qui fait la tierce majeure d'UT, il n'y a qu'a diminuer chaque quinte du quart de ce comma..."

"Lorsqu'on est arrivé au milieu de la partition, on rend les quintes un peu plus justes, et cela de plus en plus jusqu'à la dernière...Il ne faut pas attendre qu'on soit arrivé au SOL# pour rendre les quintes un peu plus justes, et l'on doit s'y prendre dès la quinte d 'UT# à SOL # (supposé qu'on ait commencé la partition par UT) pour qu'on ait moins à regagner sur les quintes suivantes; et par ce moyen les dernières tierces majeures en souffrent beaucoup moins; quoy qu'on ne puisse se dispenser de les rendre pour lors un peu trop fortes, non plus que les deux dernières quintes."

Johann Sebastian Bach (1685-1750) et « le clavier bien tempéré »

- ✓ Première transposition de l'histoire
- ✓ Préludes et fugues en mode majeur et mineur dans chacun des 12 ½ tons, soit 24 préludes et 24 fugues
- ✓ Le tempérament utilisé reste une énigme, mais sa structure semble se trouver dans le frontispice de l'œuvre :

- ✓ Pour écouter l'œuvre :

  https://fr.wikipedia.org/wiki/Le_Clavier_bien_tempéré

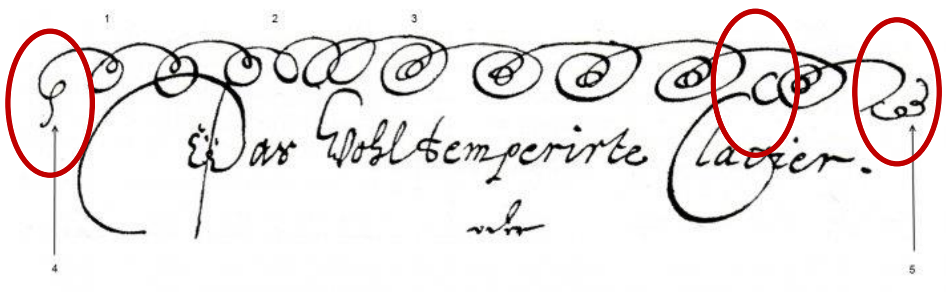
- ✓ Analyse harmonique

  http://jan.ucc.nau.edu/~tas3/wtc.html

Interprétation du tempérament « bien tempéré » de Bach par Bradley Lehman

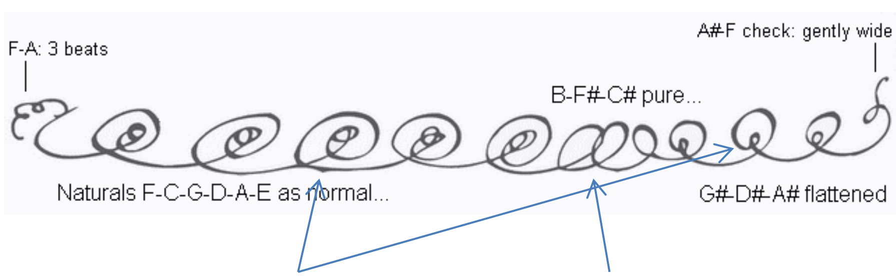
http://www.larips.com/.

(« Bien tempéré » pouvant prêter à confusion il serait préférable de dire « équilibré »)



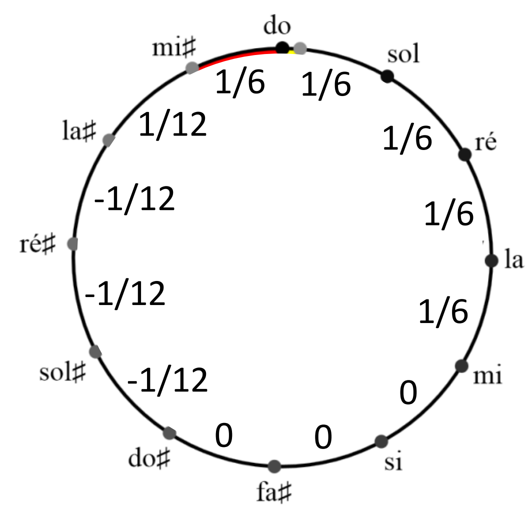
Les boucles simples, doubles, ou à nœuds doubles sont des indications pour tempérer les quintes

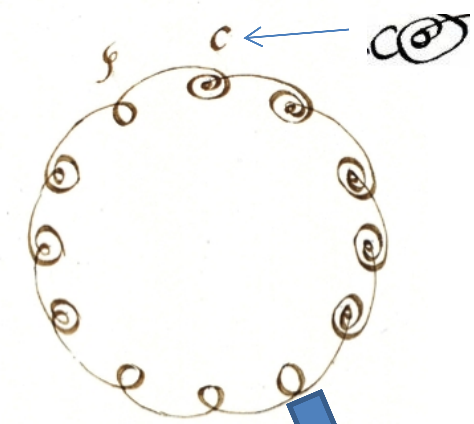
B. Lehman retourne le frontispice :



Altération des quintes
Valeur pour nœuds doubles
ou doubles boucles

Intervalles purs

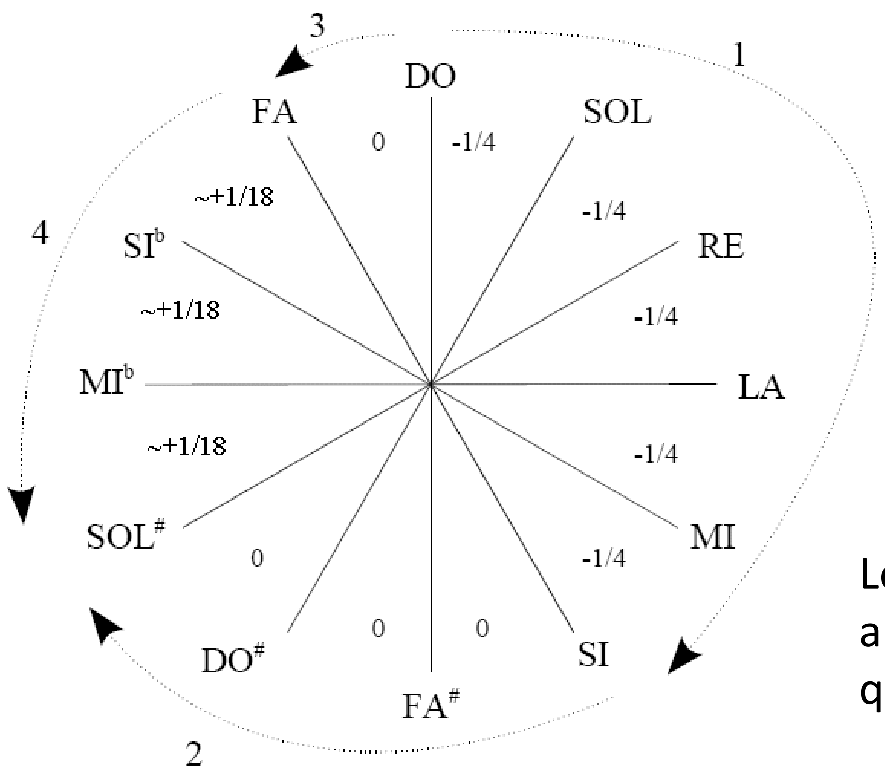




Version légèrement modifiée par Emile Jobin

https://www.clavecin-en-france.org/spip.php?article52

Donne l’accent sur les dièses Fa# do# Sol#
et sur les bémols Si^b et Mi^b



La quinte Do-Fa (3) très utilisée est pure

Tempérer les quintes « do-sol ; sol-ré ; ré-la ; la-mi » (1) en les diminuant d’un quart de comma afin d’obtenir une tierce pure sur « do-mi »,
comme semble l’indiquer le dessin à droite :
C puis boucle simple puis 3

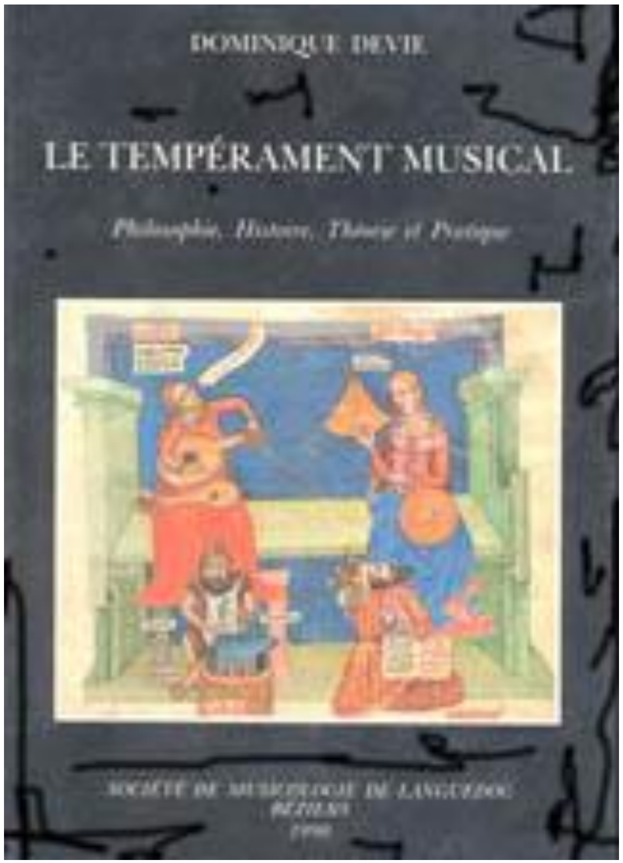
Les 3 quintes de Fa à Sol# (4) sont légèrement augmentées pour compenser la cinquième quinte diminuée (1)

- ✓ **Les révolutions du tempérament musical** : à partir du 17ème siècle
- ✓ **Avènement du tempérament égal :**

- Connu depuis le 16ème siècle
- Généralisé fin 18ème siècle (après la révolution française)

- ✓ **Musique baroque** : début 17ème Siècle – milieu 18ème Siècle
- ✓ **Musique classique** : à partir de la fin du 17ème Siècle

Antonio Vivaldi	1678-1741
Johann Sebastian Bach	1685-1750
Georg Friedrich Haendel	1685-1759
Jospeh Haydn	1732-1809
Wolfgang Amadeus Mozart	1756-1791
Ludwig van Beethoven	1770-1827
Franz Schubert	1797-1828
Richard Wagner	1813-1883
Piotr Llitch Tchaïkovski	1840-1893



« Le tempérament musical :
Philosophie, Histoire, Théorie et Pratique »

Société de musicologie du Languedoc - Béziers, 1990

Dominique Devié

... *la généralisation du tempérament égal est analogue à la multiplication des pylônes électriques, des antennes et des autoroutes : ces innovations ont apporté des facilités mais également ont contribué à gâcher le paysage et à "mécaniser" notre univers. C'est pourquoi je m'oppose à toute justification du tempérament égal, lequel n'a strictement rien apporté sur le plan musical*. ... "

Jean Jacques Rousseau à propos du tempérament égal :

« Malgré l'air scientifique de cette formule, il ne paroît pas que la pratique qui en résulte ait été jusqu'ici goûtée des musiciens et des facteurs : les premiers ne peuvent se résoudre à se priver de l'énergique variété qu'ils trouvent dans les diverses affections des sons qu'occasionne le tempérament… »

« Le Dictionnaire de Musique » (1767)

La gamme chromatique bien tempérée

Non-linéarité des intervalles : Echelle logarithmique

Des intervalles consécutifs égaux correspondent à des fréquences fondamentales de plus en plus espacées.

Intervalle d'octave: $f_2 = 2f_0$, $f_3 = 4f_0$, $f_4 = 8f_0 \ldots$ $\rightarrow$ $f_n = 2^n f_0$

Cela conduit à définir les fréquences par une échelle en puissance de 2 :

$$f_i = f_0\, 2^{\,i/12}$$

Les intervalles sont alors tous égaux : $f_{i+1}/f_i = 2^{\,1/12}$

La gamme chromatique bien tempérée

La gamme chromatique bien tempérée correspond à des intervalles égaux, l'octave correspondant à 1200 Cents, Chaque demi-ton vaut 100 Cents, ce qui donne les fréquences suivantes :

Définition des intervalles en Cents $I = 1200 \ \log_2 (f_2/f_1).$

(Rappel : $\mathrm{Log}_2(x)=\log_{10}(x)/\log_{10}(2)$)

Dans cette gamme, les intervalles sont égaux par construction, mais…

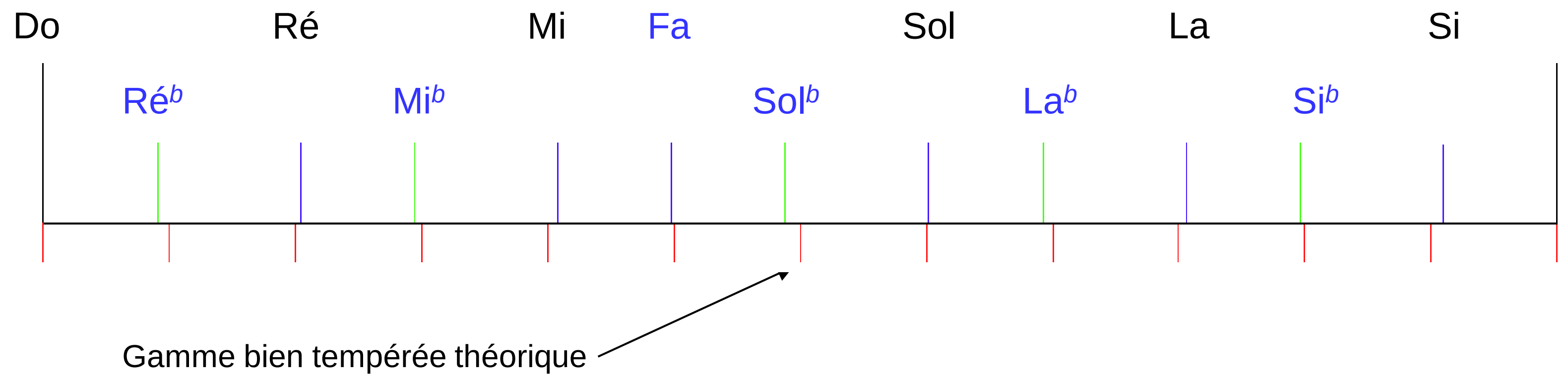
…la quinte n'est plus harmonique :

$$1200 \log_2(3/2) = 701.955 \neq 700$$

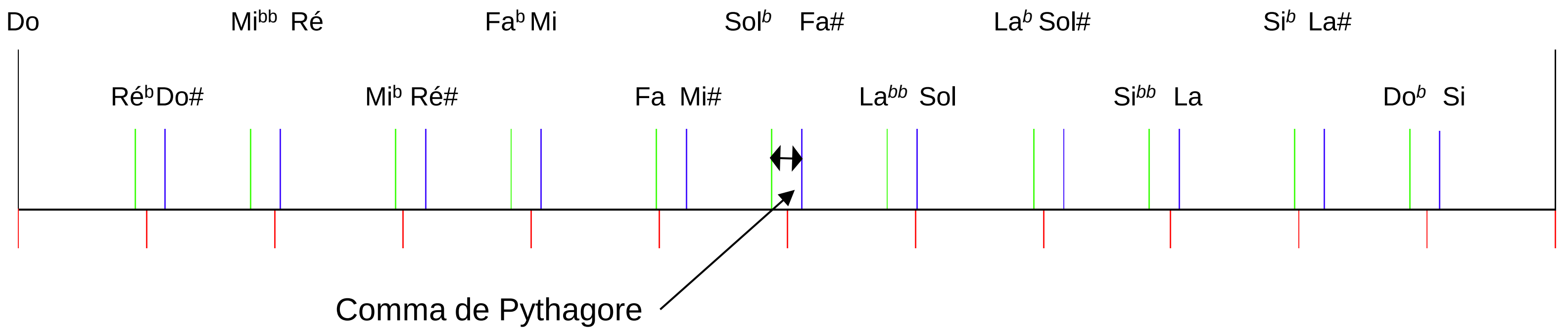
Intervalles harmoniques et gamme bien tempérée sont en conflit !

Intervalles et Gammes

Constructions de la gamme de Pythagore : les différents intervalles sont engendrées par des rapports de quinte juste $f_2 / f_1 = 3/2$

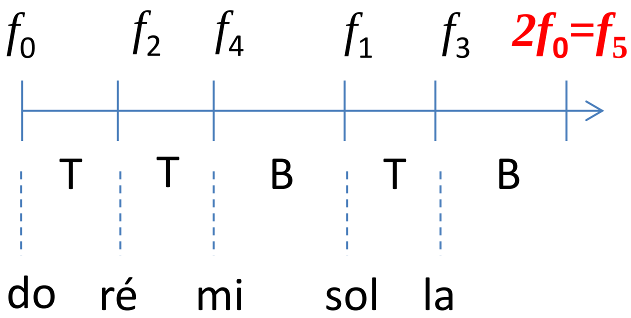


Et les dièses ?



Retour à la gamme pentatonique (n=5)

	0	f_3	f_1	f_4	f_2
Pythagore	1	3/2	9/8	27/16	81/64
	1	**1,5**	**1,13**	**1,69**	**1,27**
Tempérée	1	$2^{7/12}$	$2^{2/12}$	$2^{9/12}$	$2^{4/12}$
	1	**1.498**	**1.122**	**1.682**	**1.260**
	do	sol	ré	la	mi



- **Intervalles :**

(Gamme Pythagore (quintes) : $\mathrm{T} = 1.125$, $\mathrm{B} = \mathrm{T} \times \mathrm{L} = 1.185$)

Gamme bien tempérée

$\mathbf{T = 2^{2/12} = 1.1224}$
(1 Ton=2/12 d'octave)

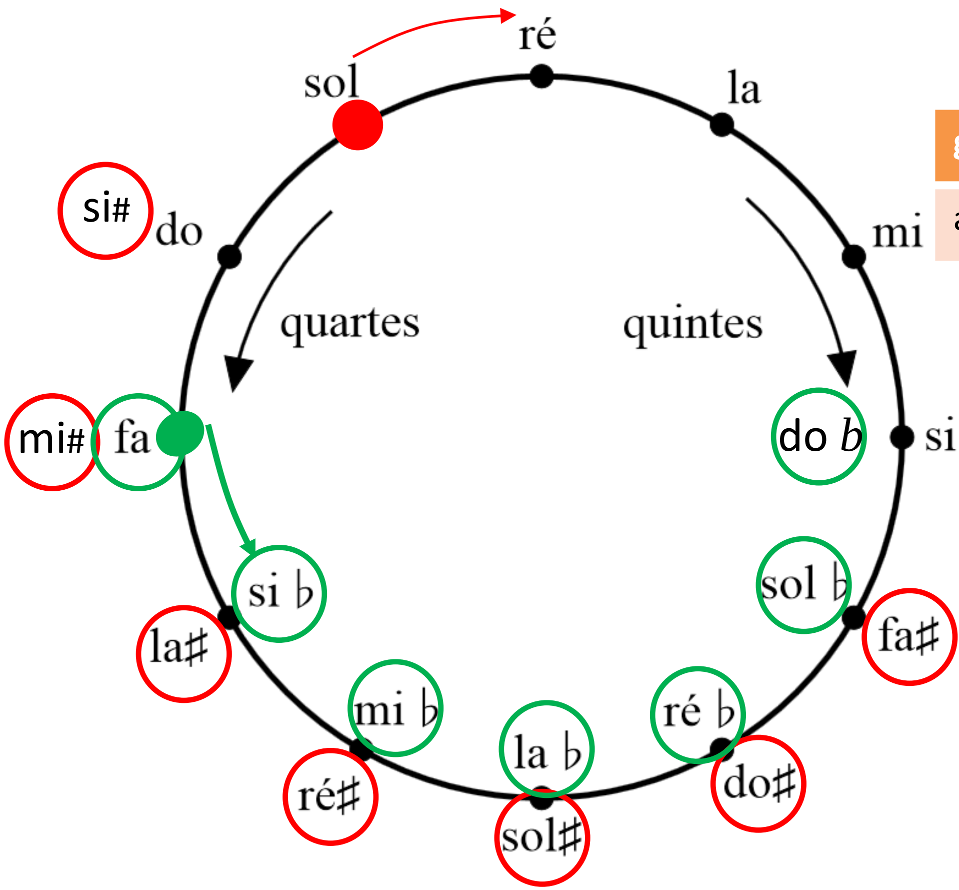
$\mathbf{B = 2^{3/12} = 1.1892}$
(1 ton ½ =3/12 d'octave)

Erreur (en valeur absolue) des gammes bien tempérées et Pythagore relativement aux rapports idéaux de la gamme harmonique parfaite Zarlino (en cents)

Note	Intervalle	Tempérée	Pythagore	Zarlino
Do	0	0	0	0
Ré	seconde	4	0	0
Mi*b*	**Tierce min.**	**16**	**2**	**0**
Mi	Tierce Maj.	14	22	0
Fa	Quarte	2	0	0
Sol	**Quinte**	**2**	**0**	**0**
La	Sixte	16	22	0
Si	Sept. Maj.	12	22	0
Ré-Fa	**Tierce min.**	**16**	**2**	**22**
Ré-La	**Quinte**	**2**	**0**	**22**

Intervalles de quintes ou tierces différents dans Pythagore et Zarlino
=> une quinte/tierce dans une tonalité ne sera plus une quinte/tierce dans une autre!!!

Cycle des quintes ascendantes en représentation circulaire



➢ Ascendant (dièses)

gamme	sol	ré	la	mi	si	fa#	do#
armure	fa#	do#	sol#	ré#	la#	mi#	si#

➢ Descendant (bemols)

Gamme :

fa →si*b* →mi*b* →la*b* →ré*b* →sol*b*→do*b*

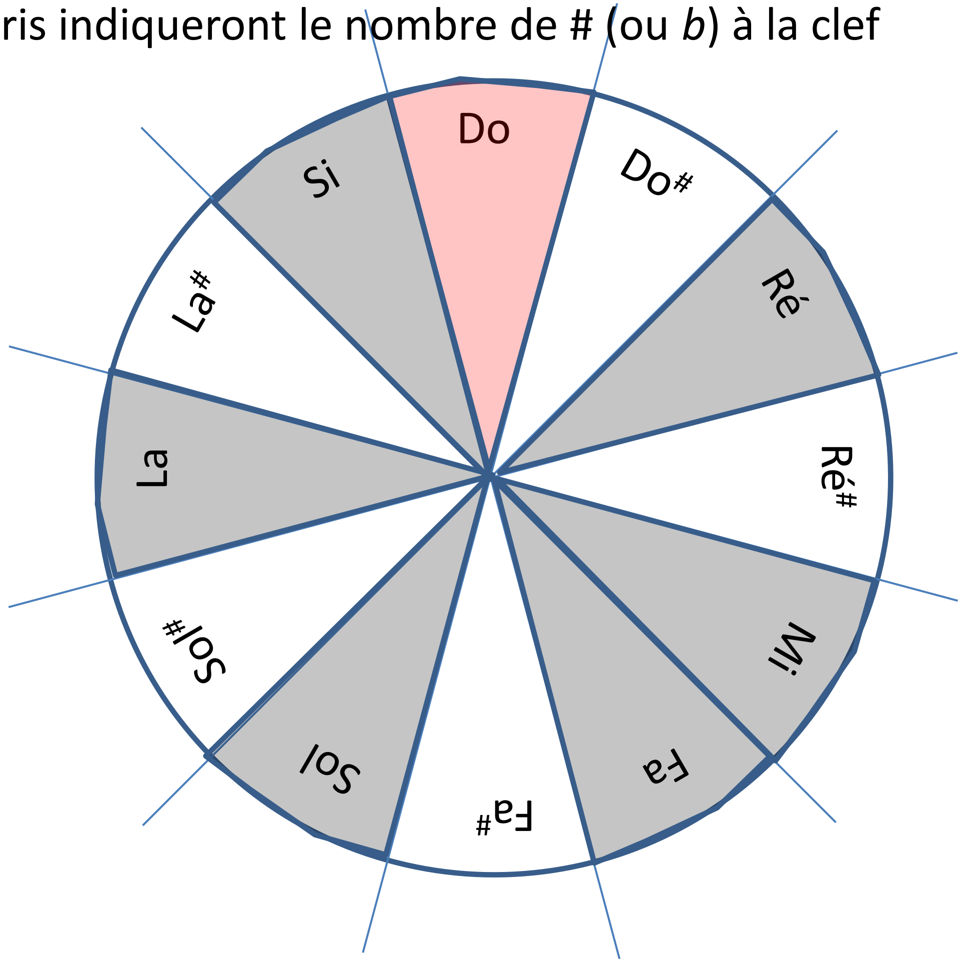
Donne des intervalles de quartes dans le sens anti-horaire

Le cycle des quintes est aussi le cycle des quartes

La Transposition

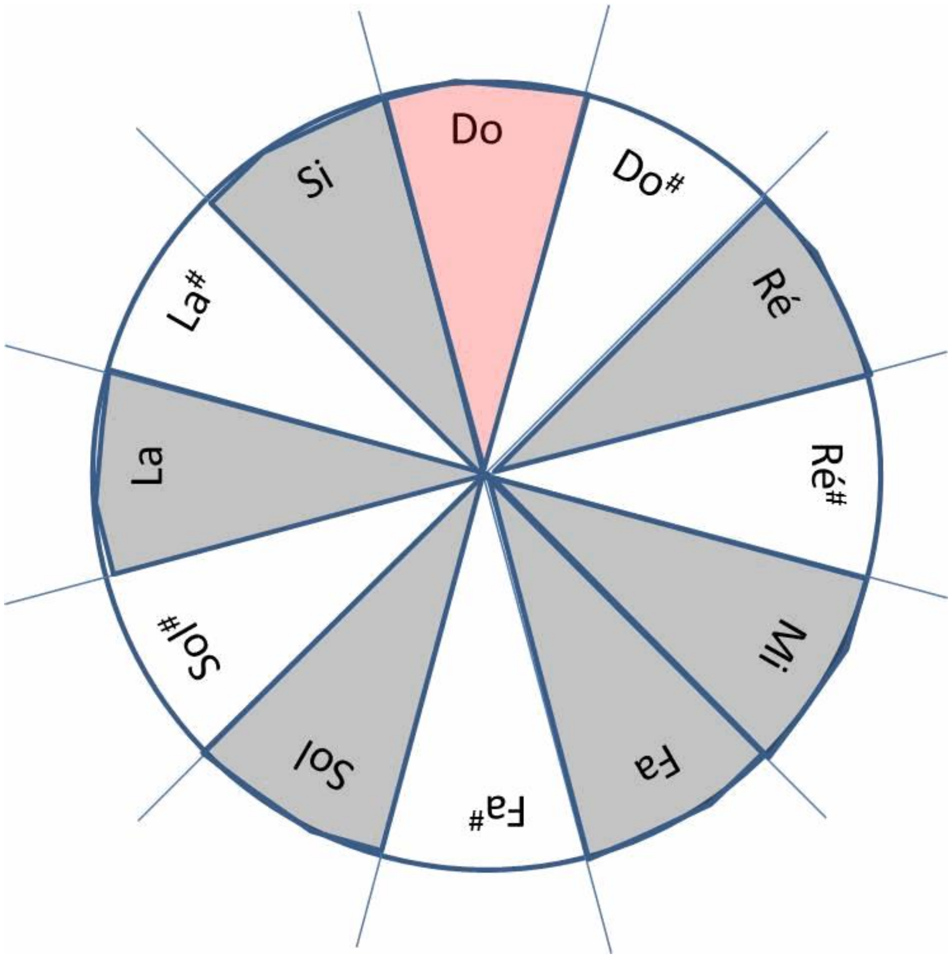
Jouer la même partition mais dans un gamme différente

- Les intervalles (majeurs) do ré mi fa sol la si do sont en gris
- La tonalité est en rouge (do dans l'exemple dessous)
- On place le quartier rouge sur la tonique que l'on veut (quinte successives)
- Les quartiers gris indiqueront le nombre de # (ou *b*) à la clef



La Transposition

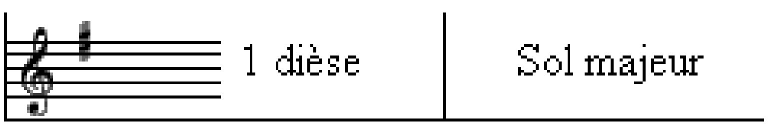
Jouer la même partition mais dans un gamme différente

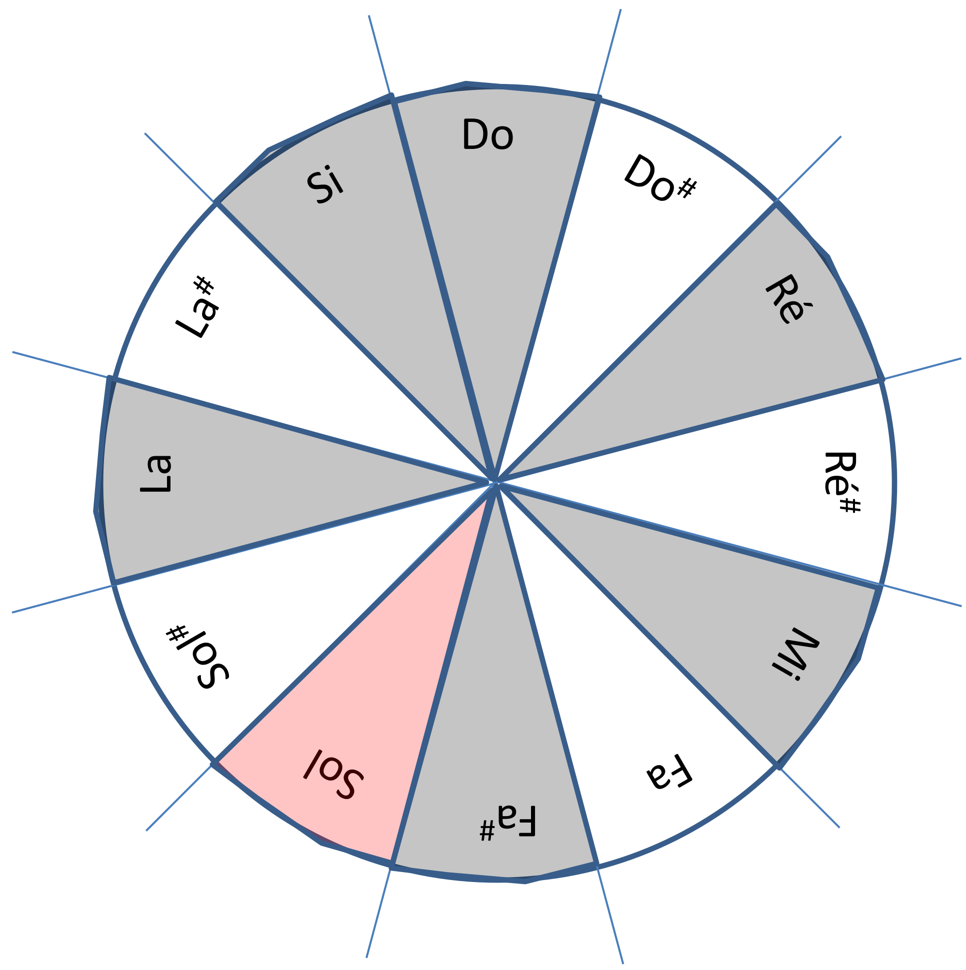


La Transposition

Jouer la même partition mais dans un gamme majeure différente

Gamme de **Sol** → **Fa#**

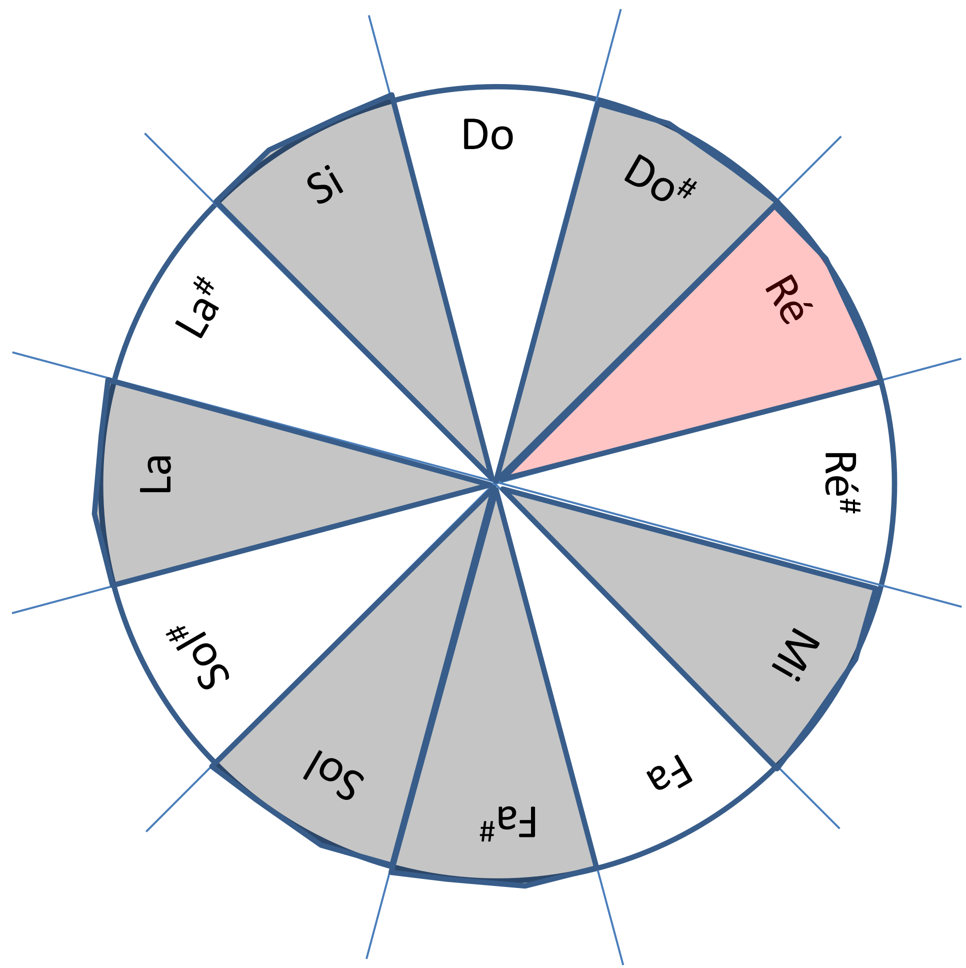


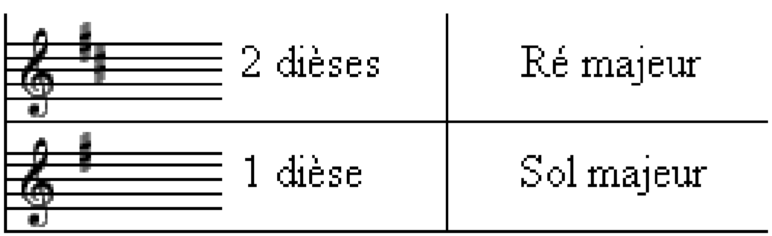


La Transposition

Jouer la même partition mais dans un gamme majeure différente

Gamme de **Ré** → **Fa$^{\#}$, Do$^{\#}$**

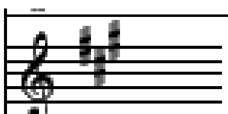
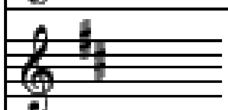
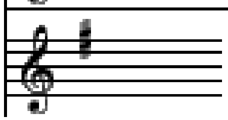


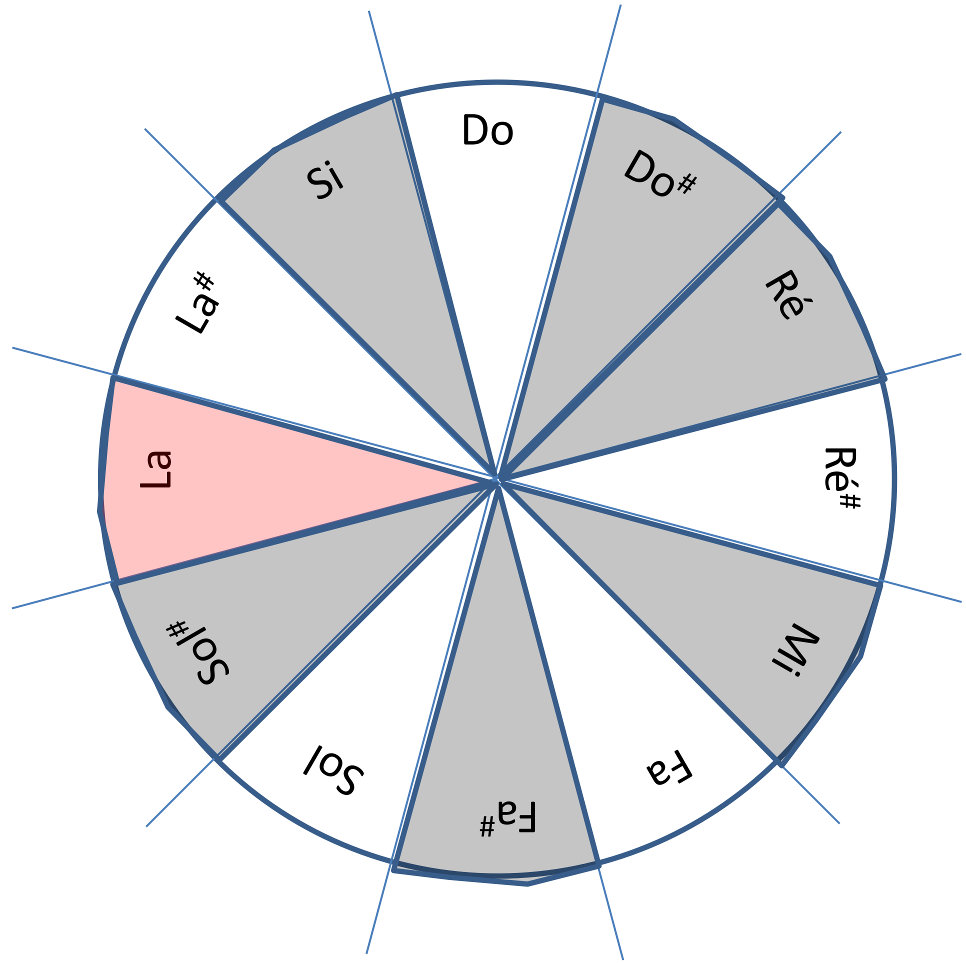


La Transposition

Jouer la même partition mais dans un gamme majeure différente

Gamme de **La** $\rightarrow$ **Fa#, Do#, Sol#**

	3 dièses	La majeur
	2 dièses	Ré majeur
	1 dièse	Sol majeur

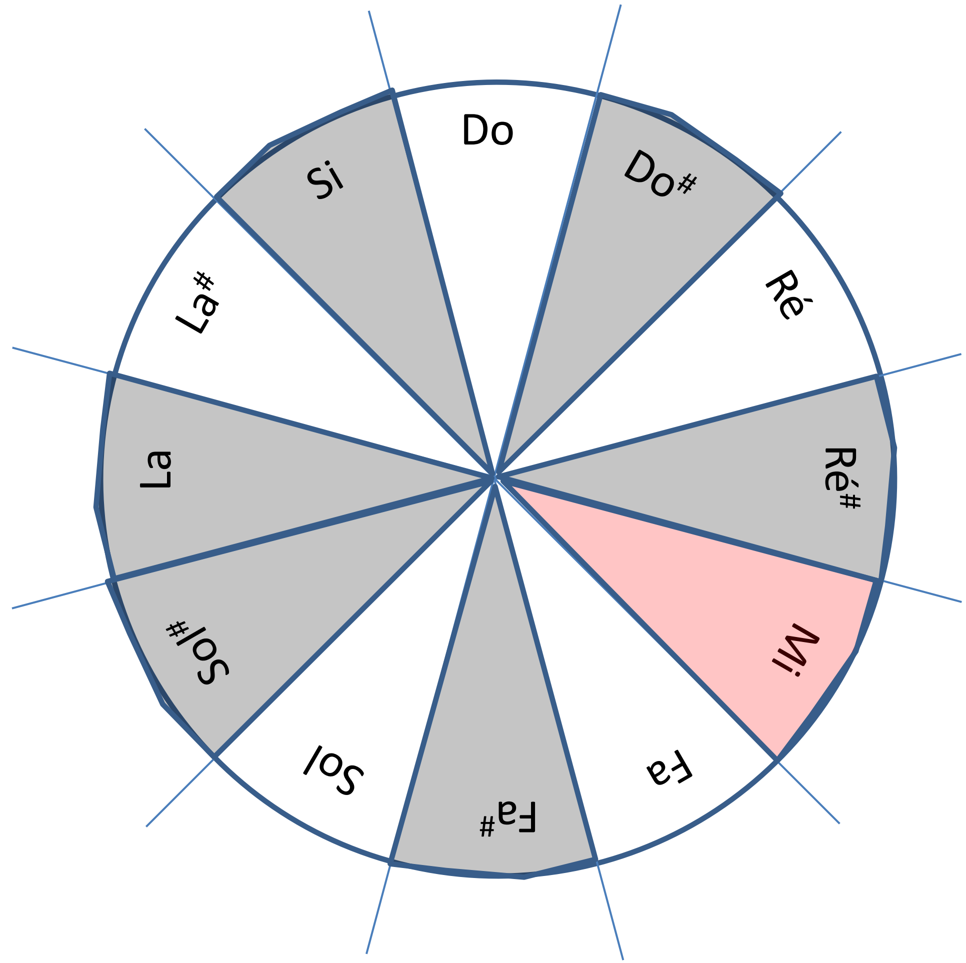


La Transposition

Jouer la même partition mais dans un gamme majeure différente

Gamme de **Mi** → **Fa#, Do#, Sol#, Ré#**

4 dièses	Mi majeur
3 dièses	La majeur
2 dièses	Ré majeur
1 dièse	Sol majeur

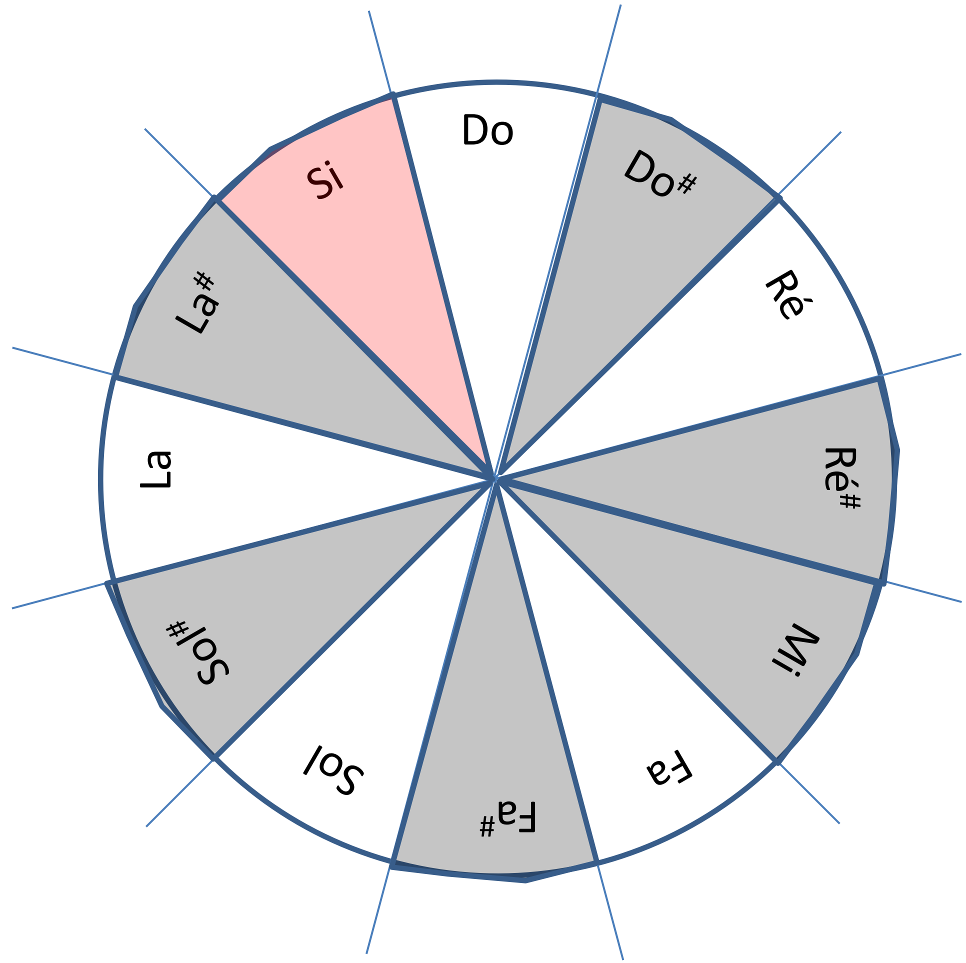


La Transposition

Jouer la même partition mais dans un gamme majeure différente

Gamme de **Si** $\rightarrow$ **Fa#, Do#, Sol#, Ré#, La#**

5 dièses	Si majeur
4 dièses	Mi majeur
3 dièses	La majeur
2 dièses	Ré majeur
1 dièse	Sol majeur

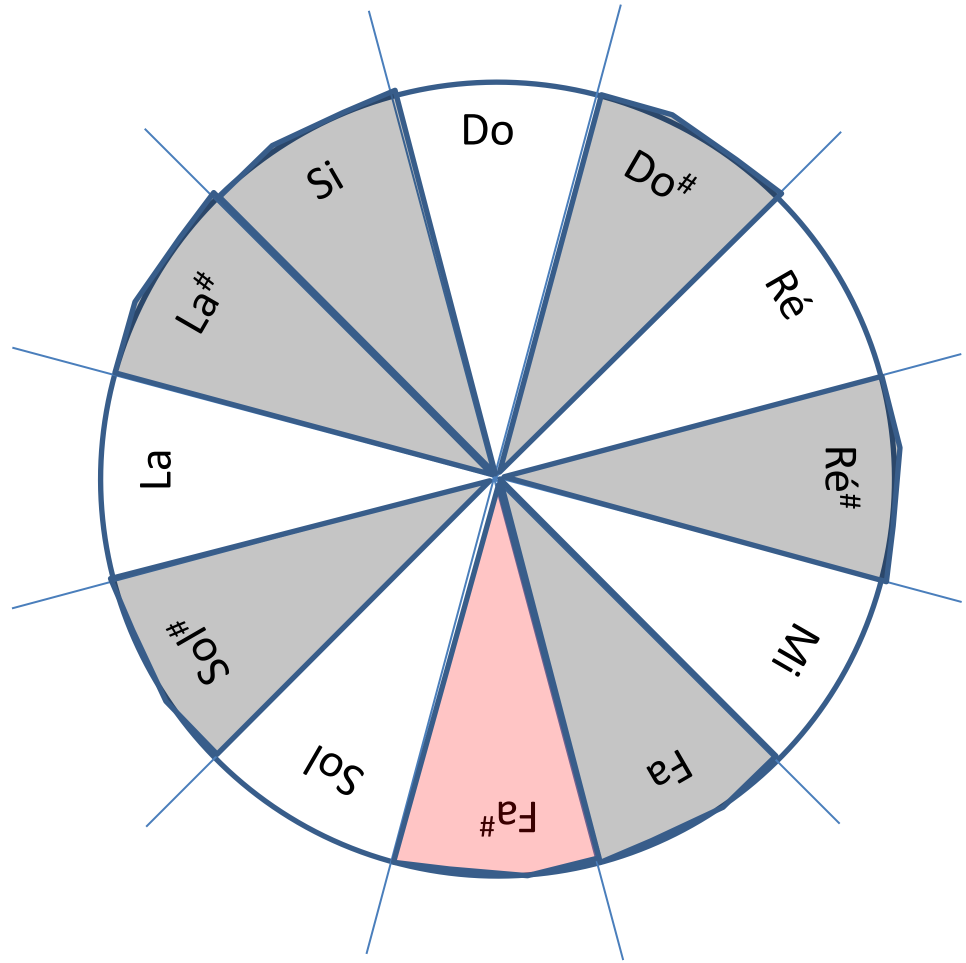


La Transposition

Jouer la même partition mais dans un gamme majeure différente

Gamme de **Fa#** → **Fa#, Do#, Sol#, Ré#, La#, Mi#**

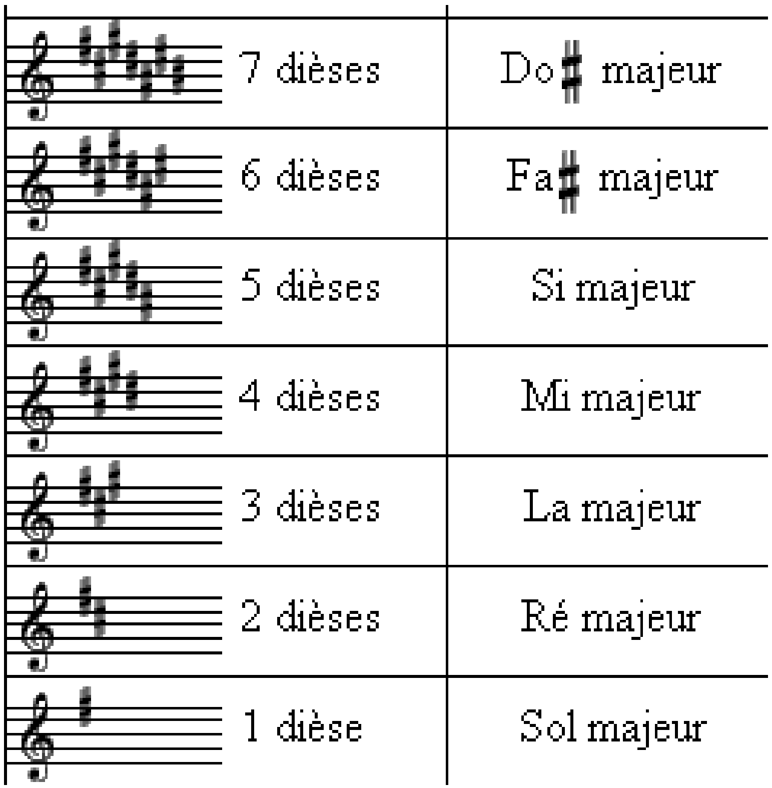
	6 dièses	Fa♯ majeur
	5 dièses	Si majeur
	4 dièses	Mi majeur
	3 dièses	La majeur
	2 dièses	Ré majeur
	1 dièse	Sol majeur

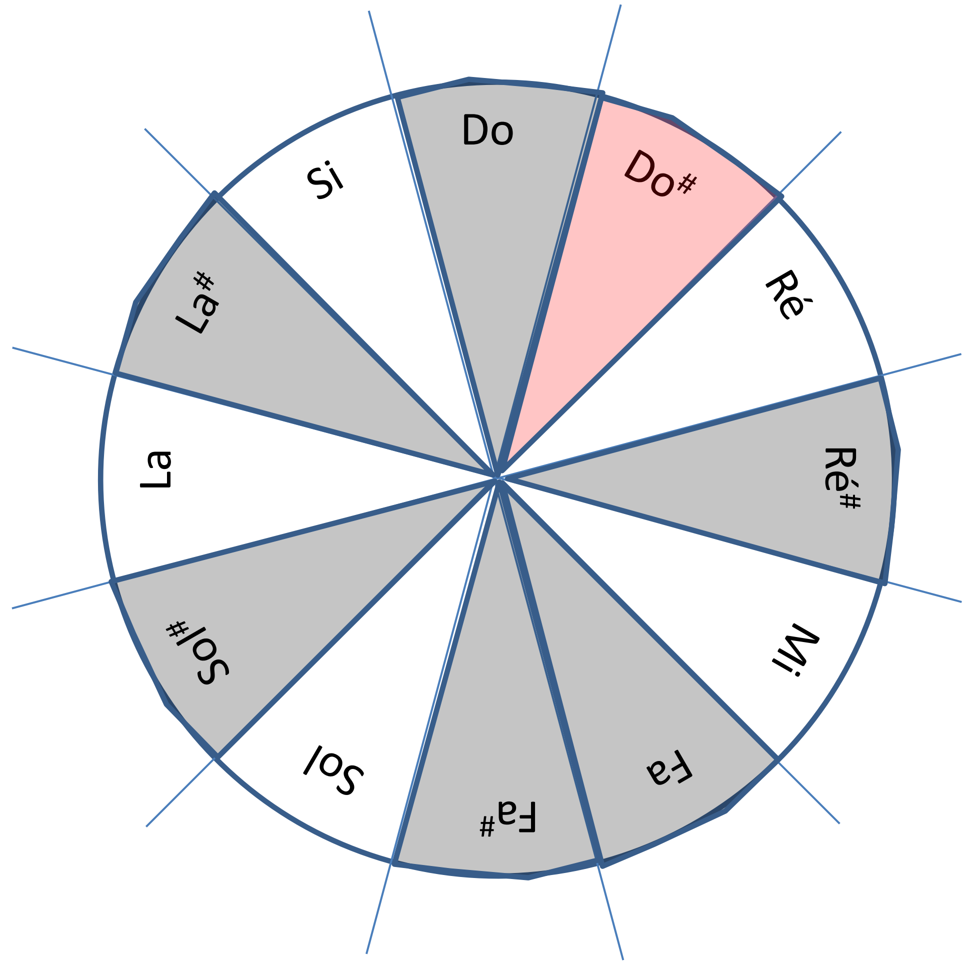


La Transposition

Jouer la même partition mais dans un gamme majeure différente

Gamme de **Do#** → **Fa#, Do#, Sol#, Ré#, La#, Mi#, Si#**





Echelle tempérée, naturelle: le point de vue des instruments

Echelle naturelle : Violons, contrebasse,…

- Le musicien peut faire vibrer toutes les fréquences continuement
- Toutes les échelles sont possibles pour un musicien aguéri
- Grande difficulté pour produire un accord (positionnement très précis et simultané d'au moins trois doigts quasi impossible
- Instruments monophoniques

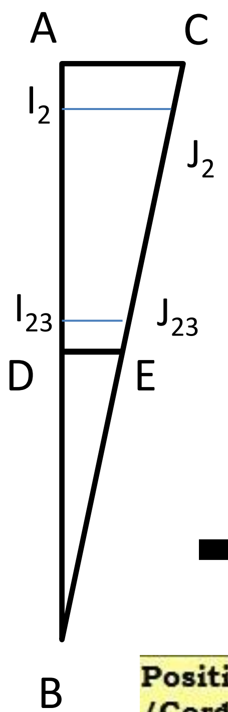
Echelle tempérée : Piano, guitare, flute,…

- La position des frettes (les touches du piano,…) impose le tempérament
- Un seul tempérament est en général possible (sauf si multiplication des touches, frettes,… mais alors l'instrument devient injouable)
- Facilité pour produire des accords (la position des doigts est pré-définie)
- Instruments polyphoniques

D’autres échelles possibles :

Echelle arabe : (construction empirique)

Sur le manche du « Oud » (luth) l’octave est divisé en 24 parties



- ✓ Triangle ABC tel que AC=AB/36
- ✓ D milieu de AB
- ✓ On divise AD en 24 partie égales de cotes I_p, avec p=1..24
- ✓ Longueurs successives des cases : I_pJ_p,
- ✓ Octave supérieur : on réitère à partir de D

Après 24 frettes, l’octave est bouclé à 1/144 près (mieux que 1%) !!

Les intervalles sont « presque » égaux, $\in$ [1.0279;1.0293]

Position /Cordes	P1	P2	P3	P4	P5	P6	P7	P8	P9	P10
Do aigüe	Do ½ #	Do#	Ré ½ b	Ré	Ré ½ #	Ré#	Mi ½ b	Mi	Fa ½ b	Fa
Sol	Sol ½ #	Sol #	La ½ b	La	La ½ #	La #	Si ½ b	Si	Do ½ b	Do
Ré#	Mi ½ b	Mi	Fa ½ b	Fa	Fa ½ #	Fa #	Sol ½ b	Sol	Sol ½ #	Sol #
La#	Si ½ b	Si	Do ½ b	Do	Do ½ #	Do #	Ré ½ b	Ré	Ré ½ #	Ré #
Fa	Fa ½ #	Fa #	Sol ½ b	Sol	Sol ½ #	Sol #	La ½ b	La	La ½ #	La #/Sib
Do grave	Do ½ #	Do#	Ré ½ b	Ré	Ré ½ #	Ré#	Mi ½ b	Mi	Fa ½ b	Fa
Position /Cordes	P1	P2	P3	P4	P5	P6	P7	P8	P9	P10

Musique Balinaise :

- De nombreux tempéraments possibles.
- Une gamme chromatique à sept notes auxquelles on ajoute quelques notes auxiliaires
- Deux notes identiques séparées de quelques cents et accordées de manières à produire une certaines dissonances (un accordage qui recherche des battements)!!

Musique indienne :

- Sa Re Ga Ma Pa Da Ni correspondant « à peu près au sept notes occidentales Do Re Mi Fa Sol La Si Do.
- Notes diminuées ou augmentées pour créer les dièses et bemols
- L’écart entre « swaras » (tons) n’est pas pas toujours le même. C’est une des particularités de la musique indienne.
- Trois octaves grave- medium- aigü

Et bien d’autres….

Exercices

Exercice 1

La gamme bien tempérée théorique est constituée de 12 demi-tons égaux (intervalle entre deux notes successives

1. Calculer la valeur d'un demi ton en Cents.
2. A partir de la fréquence du La4=440Hz, calculer les fréquences des différentes notes de la gamme entre Do4 et Do5. On arrondira les valeurs à 4 chiffres significatifs
3. Comment obtenir les fréquences des notes précédentes et suivantes ?
4. Que vaut l'intervalle de quinte Do4-Sol4, en demi-ton ? En Cents? Montrer que cet intervalle est identique quelque soit l'octave considéré. Quel est le rapport des fréquences correspondant ?

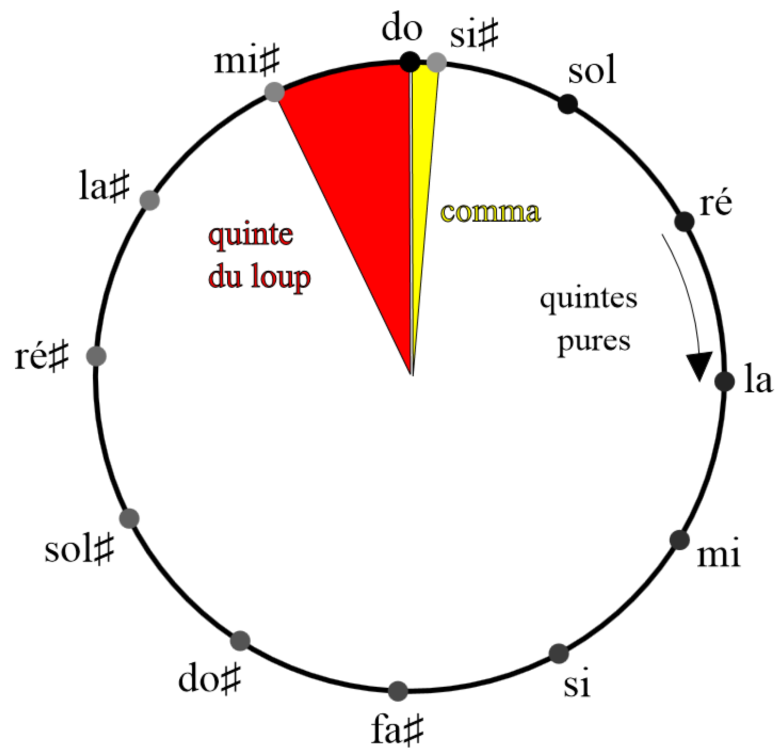
Exercice 2

1. Rappeler la manière dont est construite la gamme de Pythagore
2. Donner les rapports de fréquence correspondant aux 7 notes de la gamme chromatique majeure Pythagoricienne (cf. cycle des quintes page suivante)
3. Quelles sont celles qui sont identiques à la gamme des harmoniques naturelles (cf. tableau page suivante) , quelles sont celles qui sont différentes?
4. En continuant la série des quintes ascendantes, calculer les fréquences des notes dièsées. Puis avec la série descendante, calculer les notes bémolisées. Quel est l'écart entre Sol^{b} et Fa$^{\#}$ (en fréquence puis en cents)? Quelle est la plus haute de ces deux notes ?

Intervalles gamme naturelle

Not e	Nom de l'Intervalle	Inter valle
Do	Tonique	1
Ré	Seconde	9/8
	Tierce min.	6/5
Mi	Tierce Maj.	5/4
Fa	Quarte	4/3
Sol	Quinte	3/2
La	Sixte	5/3
	Septième min.	9/5
Si	Septième Maj.	15/8
Do	Octave	2

Cycle des quintes



Exercice 1

1. ½ ton = 100 cents
2. $f_i=f_0 2^{i/12}$ La$\rightarrow$Si, i=2 f_{si}=493.88Hz

   Sol$\leftarrow$La , i=-2 f_{sol}=392.00Hz
3. Notes à l'octave : $f_{0n}=2^n f_0$
4. 7 ½ tons=700 cents, $f_{sol} = f_{do} 2^{7/12}$,

   octave n : $f_{nsol} = 2^n f_{sol}$ et $f_{ndo} = 2^n f_{do}$ $\Rightarrow$ $f_{nsol} = f_{ndo}=2^{7/12}$

Exercice 2

1. Suite des quintes
2. cf. page 35.
3. Cf. page 50, rapports Re, Fa et Sol identiques entre Pythagore (quintes) et Zarlino (harmonique).