



Science et Musique

Enseignement de culture générale
(HLSEG304)

Bernard Hehlen

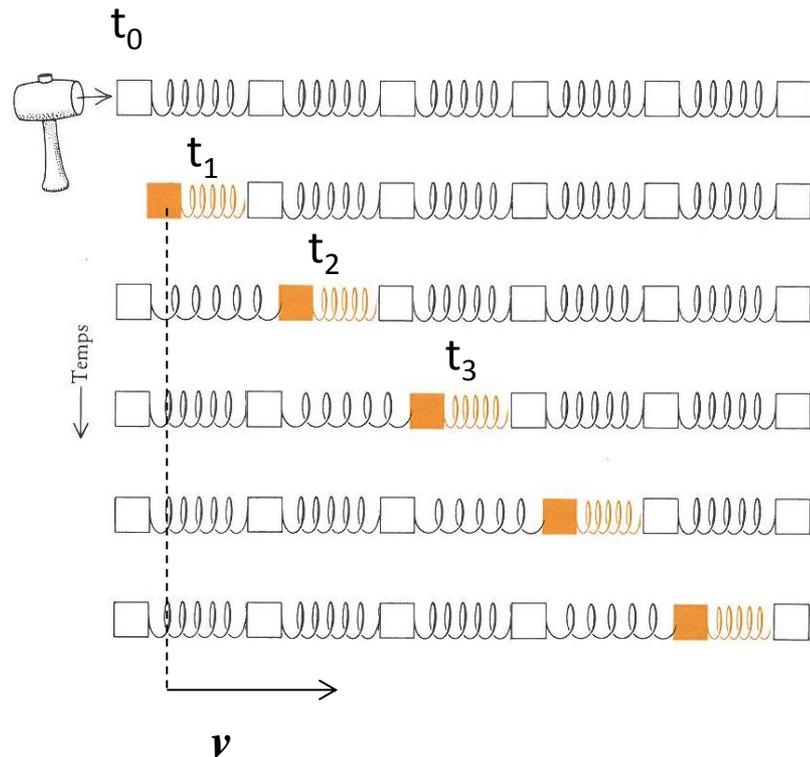
2^{ème} partie

– || –

Math et Musique

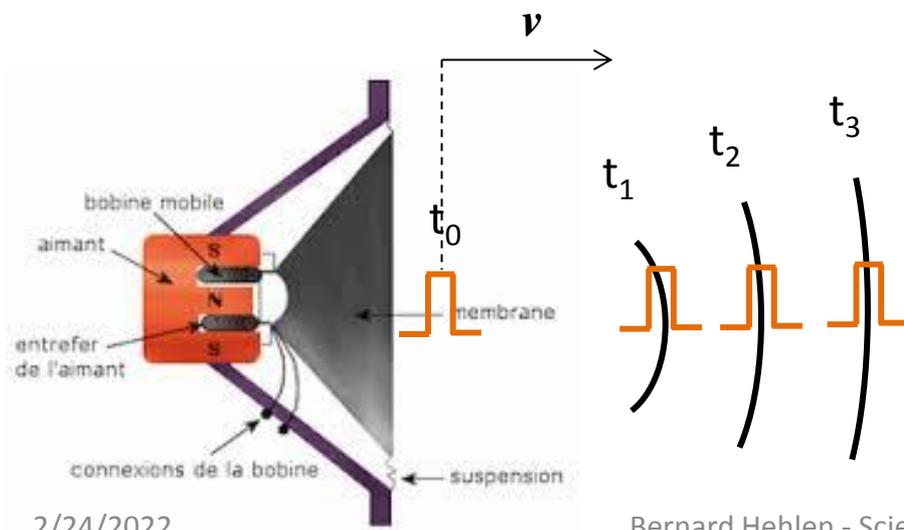
1. Le stimulus Vibratoire sonore : l'impulsion

Déplacement **longitudinal** rapide et de faible amplitude du milieu lié à une impulsion.



L'impulsion se propage de proche en proche avec une vitesse v finie

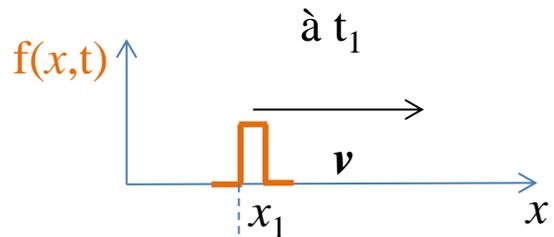
v : vitesse de propagation de l'impulsion dans le milieu
=
Vitesse de propagation du son



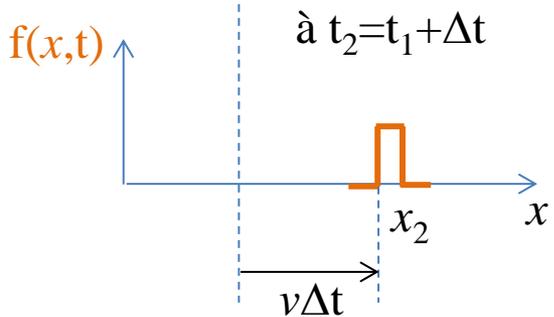
Propagation d'une impulsion dans l'espace

Fonction couplée dans l'espace et le temps : $f(x,t) = f(x-vt)$

Vitesse de propagation de l'impulsion : v



$f(x-vt)$: Onde se propageant suivant la direction x à la vitesse v .



La forme est identique à (x_1, t_1) et (x_2, x_2)

$$f(x_2-vt_2) = f(x_2-v(t_1+\Delta t)) = f(x_2-v\Delta t-vt_1) = f(x_1-vt_1)$$

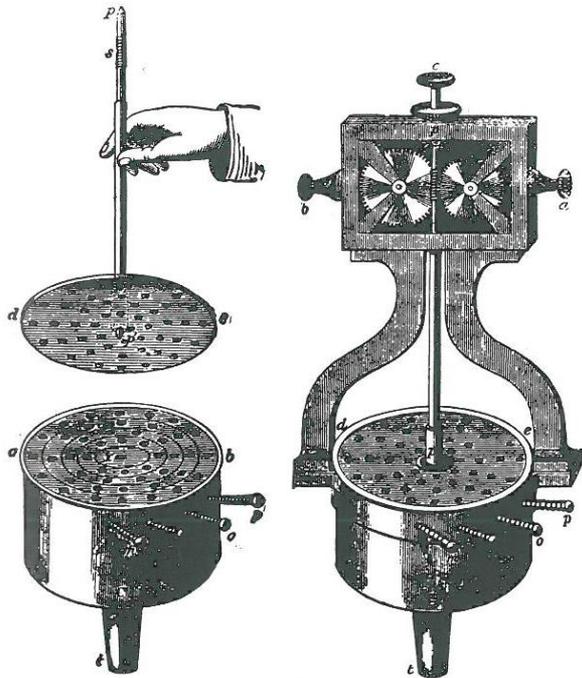
Toute fonction de la forme $f(x-vt)$ vérifie l'équation de propagation de D'Alembert :

$$\frac{\partial^2 f(x,t)}{\partial t^2} - v^2 \frac{\partial^2 f(x,t)}{\partial x^2} = 0$$

Eq. de propagation des ondes sonores

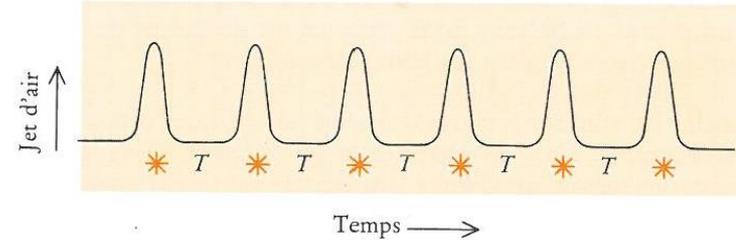
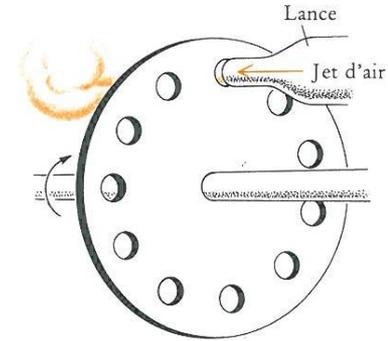
Vibrations entretenues

La sirène de C. Cagniard de la Tour (1819)



[J. Pierce « le son musical »
(pour la science-Belin)]

$$f(\text{Hz}) = \frac{1}{T(\text{s})}$$



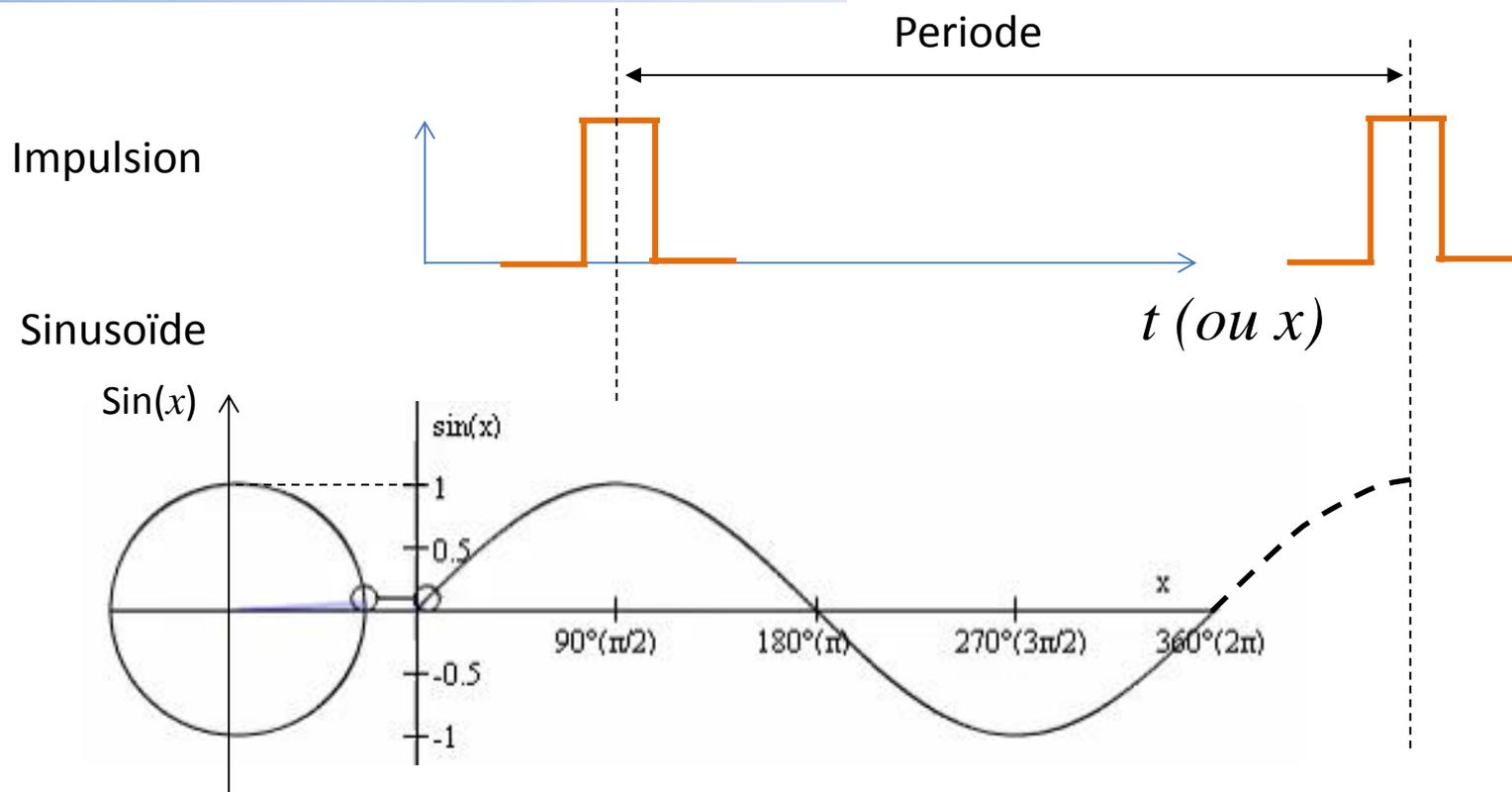
La période T : temps entre deux bouffées successives

La fréquence f : Nombre de bouffées par seconde

(bouffées=cycles=battements)

➔ **Ableton Live : « pulse répété »**

2. De l'impulsion à la sinusoïde : Le son pur



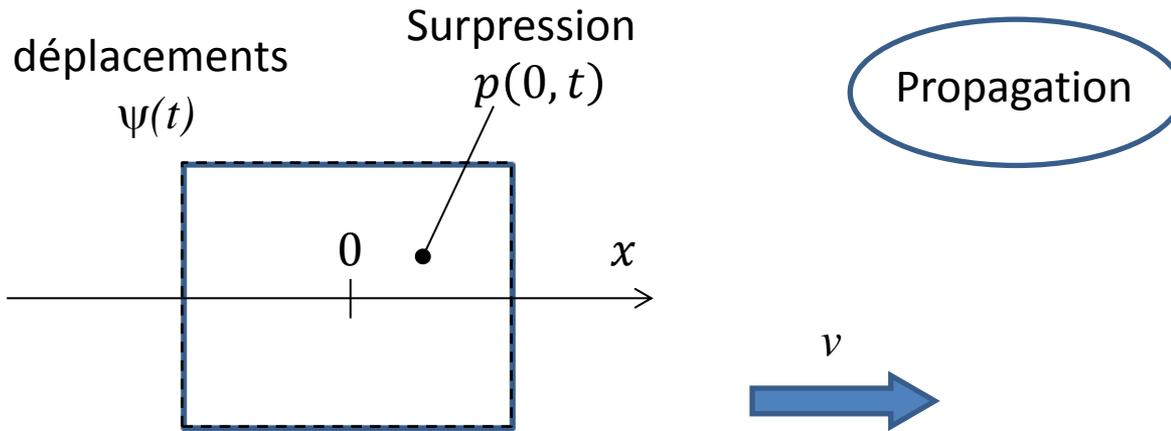
Forme temporelle :

$$\psi(t) = A \cos\left(\frac{2\pi}{T} t\right) = A \cos(2\pi f t)$$

Forme spatiale :

$$\psi(x) = A \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda} x\right)$$

Onde sonore : Fluctuation de la densité de l'air



$$\rightarrow \psi(0, t) = A \cos(2\pi f t)$$

Fréquence : f

Période temporelle : $T = 1/f$

Vitesse de propagation

=

Vitesse du son v (330m^{-1} dans l'air)

Instantané à $t=0$



$$\rightarrow \psi(x, 0) = A \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda} x\right)$$

Période spatiale : λ

Onde sonore sinusoïdale = son pur

On peut regrouper les variations spatiale et temporelle et ainsi définir la fonction ondulatoire $\psi(x,t)$:

$$\psi(x, t) = A \cos \left(2\pi f t - \frac{2\pi}{\lambda} x \right)$$

$$\lambda = \frac{v}{f}$$

$$\psi(x, t) = A \cos \left(\frac{2\pi}{\lambda} v t - \frac{2\pi}{\lambda} x + \varphi \right)$$



De la forme $f(x \pm vt)$!

Une oscillation sinusoïdale est caractérisée uniquement par sa **fréquence** (f), sa **amplitude** (A), et sa **phase** (φ).

Pris isolément, ces sons « purs » sont musicalement ineptes. Cependant, tout son complexe se décompose en une superposition de sons purs (Fourier). Ils forment la base de notre compréhension des sons.

Propagation du son dans l'air:

→ Le son : onde de pression du milieu

✓ Surpression : $p(x, t) = P(x, t) - P_{atm}$.

Forme d'onde spatio-temporelle :

$$p(x, t) = p_o \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}x - 2\pi ft\right)$$

✓ Déplacement $\psi(x, t)$: $p(x, t) = -\frac{1}{\chi} \frac{\partial u(x, t)}{\partial x}$

✓ Vitesse des ondes sonores :

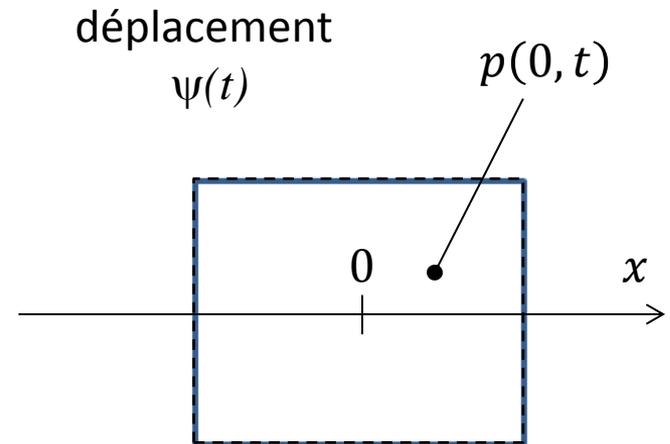
Milieux compressibles (Gaz)

$$v = \sqrt{\frac{1}{\rho\chi}}$$

ρ : densité
 χ : compressibilité

$$\lambda = \frac{v}{f}$$

λ dépend du milieu !



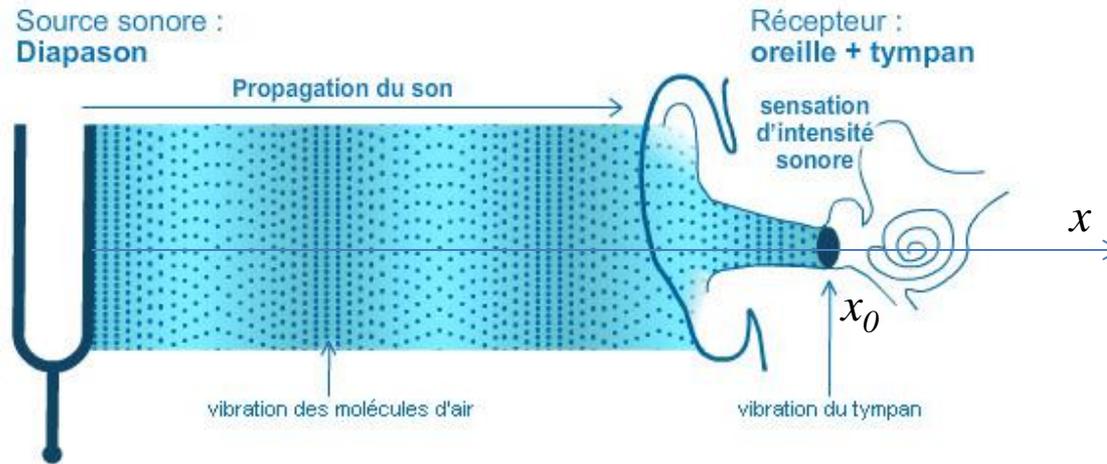
χ : Compressibilité du milieu

Propagation du son dans l'air:

✓ Onde longitudinale :



Le mouvement des atomes est dans le sens de la propagation



✓ Si on étudie le son à un endroit donné, par exemple au niveau de l'oreille $x=x_0=C^{te}$, et

$$\psi(x_0, t) \equiv \psi(t) = A \cos(2\pi ft)$$



Matlab : Génération de sons purs (son_pur.m), écouter.
Ableton live : générer une sin. avec operator, comparer.

Quelques chiffres :

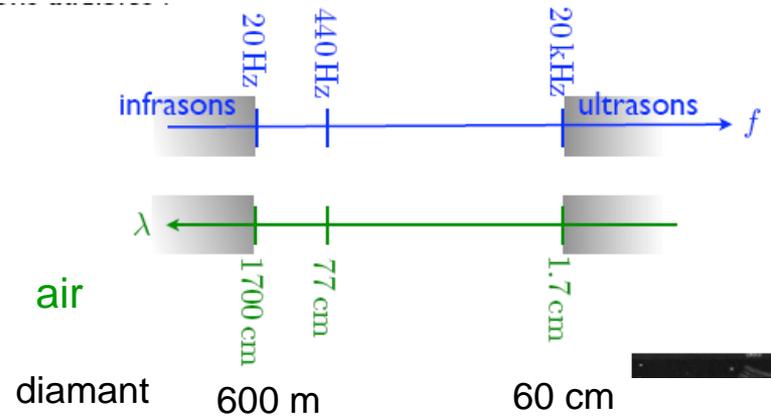
- ✓ Combien de cycles par seconde y a t-il dans un La grave à 27.5 Hz, un La aigu à 3520Hz? Quelle est la durée d'un cycle?

- ✓ Quelle sont les longueurs d'onde associées, sachant que la vitesse du son dans l'air à 20°C est $v = 343 \text{ ms}^{-1}$?

- ✓ En déduire pourquoi :
 - 1- Les sons graves sont en général peu atténués par les cloisons
 - 2- Les instruments qui produisent des sons graves sont plus “gros”

Longueurs d'onde audibles

Sons audibles: 20Hz – 20 KHz
(pour une très bonne oreille)



Vitesses du son

	milieu	v [m/s]
gaz	air (0°C)	331
	air (20°C)	343
	He	972
liquides	eau	1493
	Hg	1450
solides	diamant	12000
	verre	5640
	or	3240

→ effet de T
→ "Mickey"
→ échographie

Cordes vocales
=
ondes stationnaires
↓
 $\lambda = C^{te}$ quelque soit le milieu

plus le milieu est déformable, plus la vitesse diminue

Hauteur d'un son :

- ✓ *mathématique* : lié au nombre d'impulsions par seconde (= fréquence f)
- ✓ *Psycho-acoustique* : expérience subjective qui associe la fréquence et le "timbre".
(la sifflante 's' sera plus haute que chuintante 'ch')

Les sons musicaux sont périodiques et leur hauteur est déterminée sans ambiguïté (f)

*Chaque instrument se caractérise par son **timbre**, son **enveloppe sonore**, et la **gamme de fréquence** qui lui est accessible*

3. Sons complexes : Modes propres d'une corde

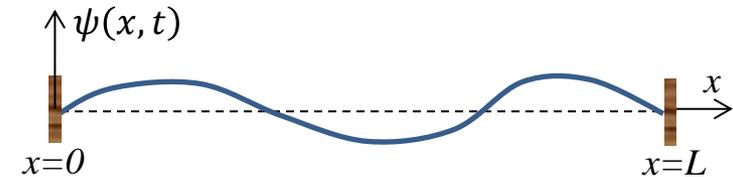
La corde est fixées à ses deux extrémités → l'onde ne se propage pas

➔ Ondes stationnaires

✓ Déplacement de la corde dans l'espace et le temps : $\psi(x, t) = X(x)T(t)$

$$\psi(x, t) = A \cos(2\pi f t + \varphi_0) \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda} x + \phi_0\right)$$

✓ Conditions aux limites: $\psi(0, t) = 0$
 $\psi(L, t) = 0$



✓ On trouve : $\psi(x, t) = A \cos(2\pi f_n t + \varphi_0) \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda_n} x + \phi_0\right)$

➔ Annexe A: détails de calcul

Fréquences propres :

$$f_n = \frac{nv}{2L}$$

Vitesse du son dans la corde

n=1 mode fondamental
n=2,... harmoniques

Longueurs d'ondes
propres :

$$\lambda_n = \frac{2L}{n}$$

Longueur de la corde

Modes propres d'une corde

- ✓ Effet de la nature de la corde

Vitesse de propagation de l'onde :

$$v = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$$

Tension

Masse linéïque

Pour une corde donnée : L diminue \rightarrow f augmente (frêtes d'une guitare)

Pour une longueur donnée : T augmente \rightarrow f augmente (tension de la corde)

μ augmente \rightarrow f diminue (masses de la corde)

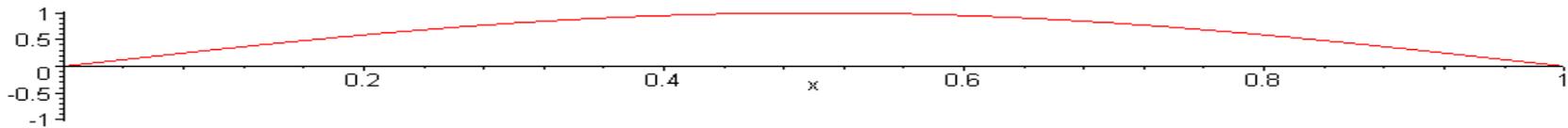
Tuyaux et cordes :

les tuyaux sonores et les cordes vibrantes vibrent de façon harmoniques :

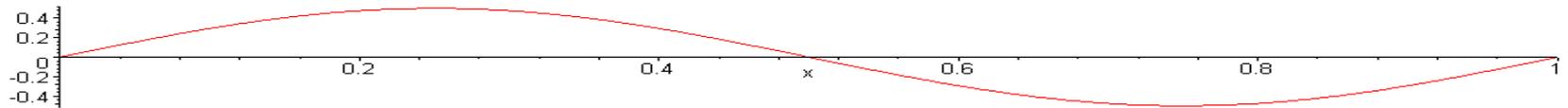
$$f_n = \frac{nv}{2L}$$

L

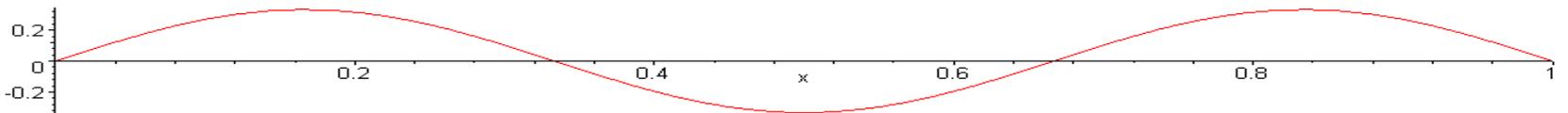
Mode fondamental (n=1) $f_1 = \frac{v}{2L}$



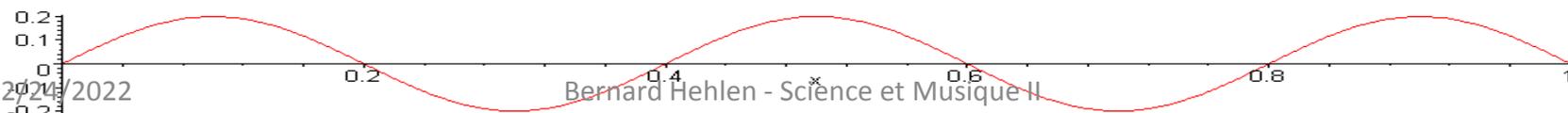
1^{ère} harmonique (n=2) $f_2 = 2f_1$



2^{de} harmonique (n=3) $f_3 = 3f_1$



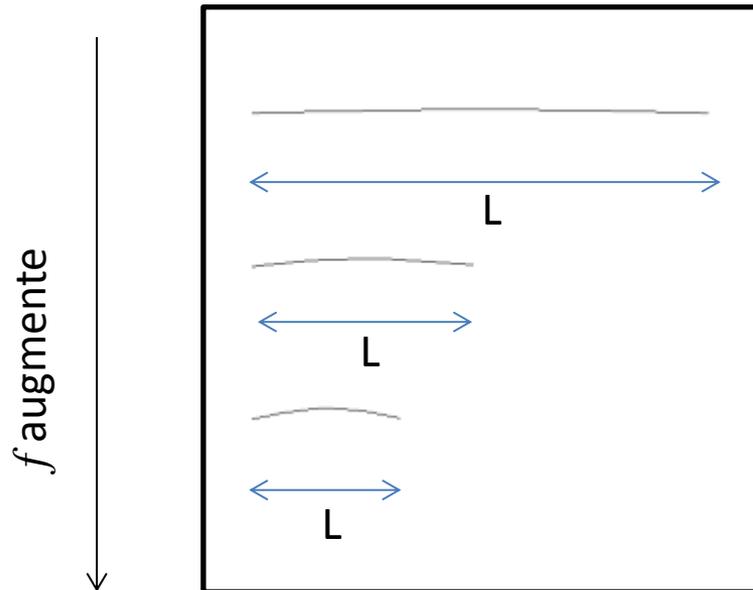
3^{ème} harmonique (n=5) $f_5 = 5f_1$



Variation de la fréquence avec la longueur L de la corde

$$f = \frac{v}{2L}$$

(mode fondamental)



En fait

$$\psi(t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(2\pi f_n t + \phi_n)$$

Dépendance temporelle
(x_0 fixé)

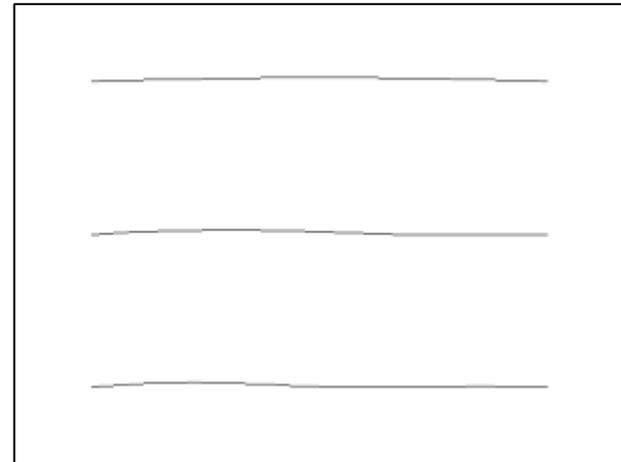
Le mouvement de la corde est une combinaison du mouvement de toutes les harmoniques

Vibration du mode fondamental

Fondamental + 1 harmonique

Fondamental + 2 harmoniques

⋮



Corde de Melde : mise en évidence des modes propres d'une corde.

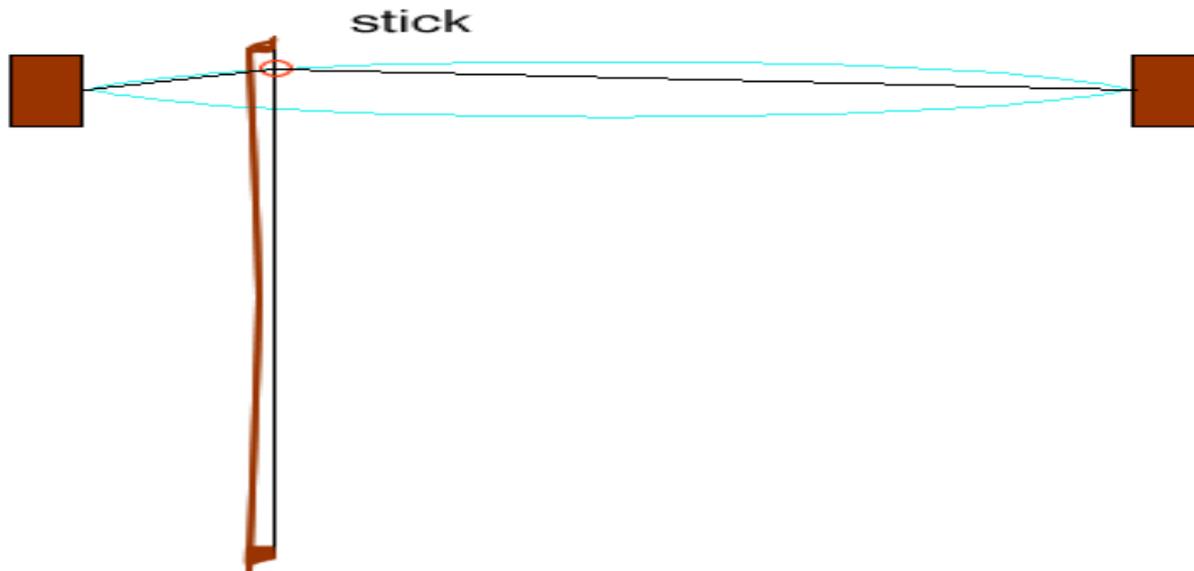


Video : Corde de Melde:

<https://www.youtube.com/watch?v=4BoeATJk7dg>

Cordes frottées : le violon

La vibration d'une corde de violon est très semblable. Le mouvement observé s'appelle vibration de Helmholtz :



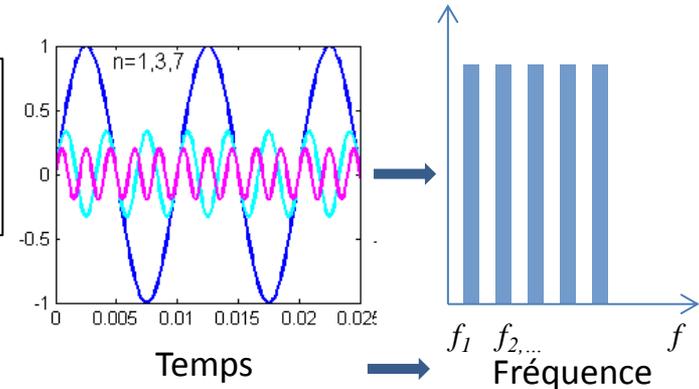
On remarquera au passage la relation entre vitesse de l'archet et amplitude de la vibration, bien connue des violonistes.

Sons complexes :

La note jouée par un instrument est une somme de sons purs :

Dependance
temporelle
(x_0 fixé)

$$\psi(x_0, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(2\pi f_n t + \phi_n)$$



✓ Instruments à harmoniques :

les fréquences f_n (les harmoniques) **sont** des multiples de la fréquence fondamentale f_1

➡ **Tuyaux sonores et instruments à cordes**

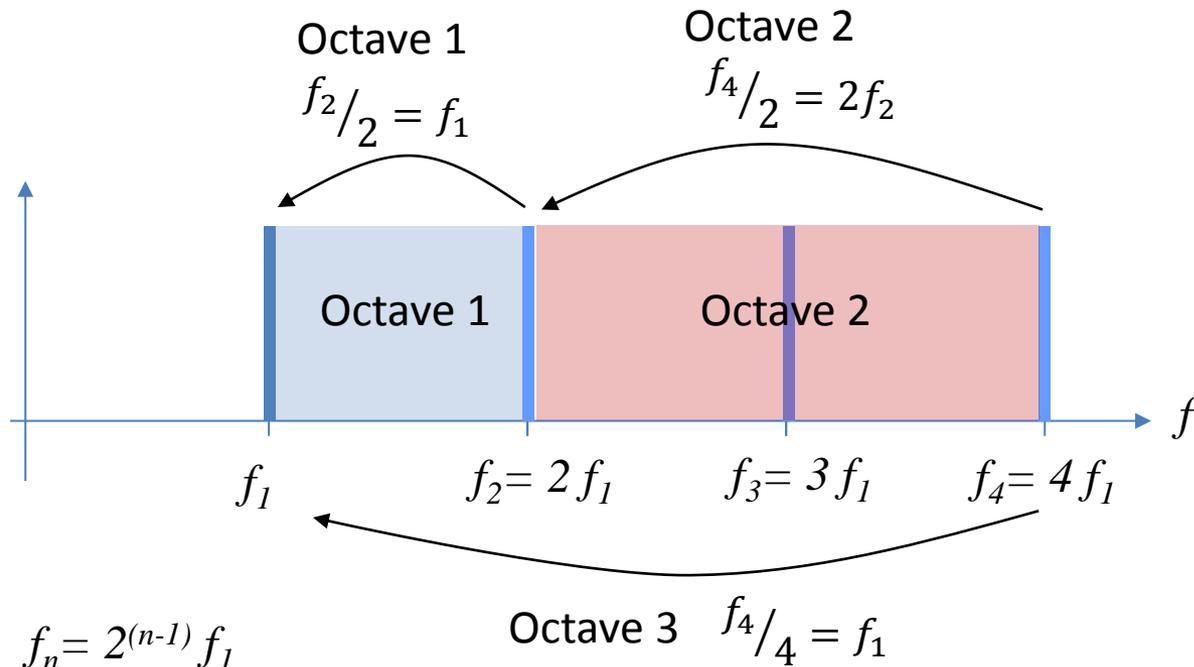
➡ **Ableton Live : formes d'ondes**

✓ Instruments à partiels :

les fréquences f_n (les partiels) **ne sont pas** des multiples de la fréquence fondamentale f_1

➡ **Tambours, cloches, lames**

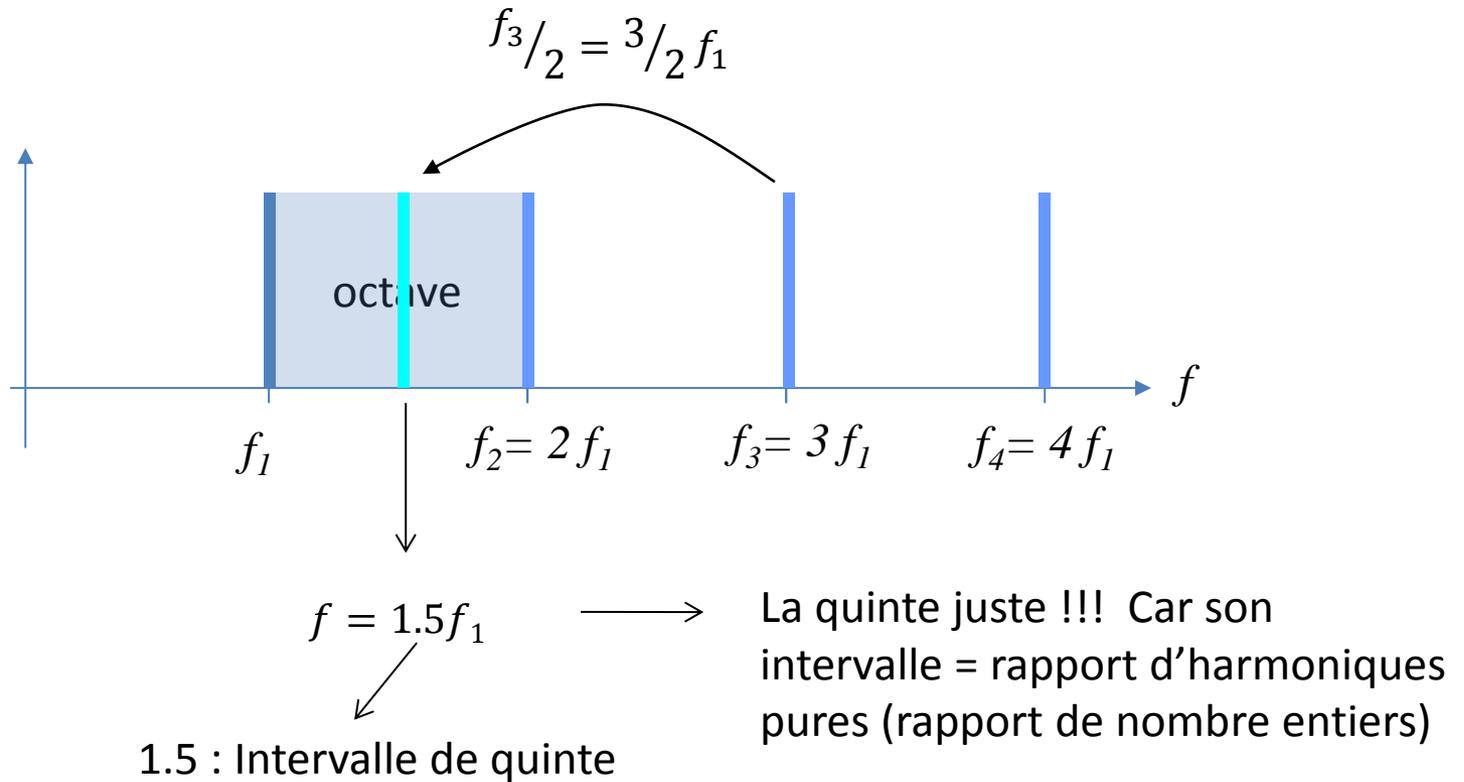
- Definition de l'octave: *L'octave correspond à la fréquence double et produit la même sensation de note que la fondamentale*
- Les notes d'une gamme sont construites à l'intérieur de 2 octaves consécutifs (ex.: $[f_1, 2f_1]$)
- f_1 est la note *fondamentale*, f_2, f_3, \dots sont les *harmoniques*



- Octave n: $f_n = 2^{(n-1)} f_1$

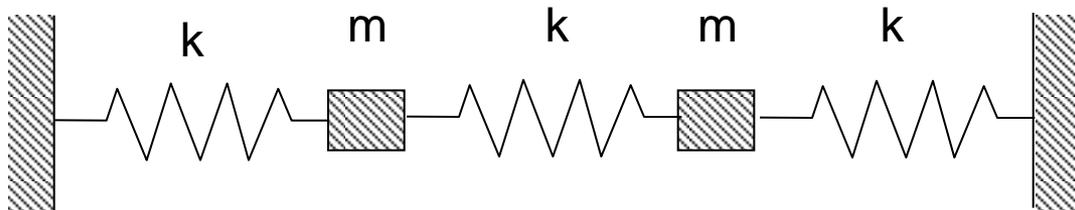
- **Instruments à « harmoniques » purs** : Les harmoniques sont des multiples entiers de la fondamentale

L'harmonique 3 (f_3) : première harmonique intéressante → **C'est la quinte**



Les partiels

Un exemple simple à partiels



$$f_1 = 2\pi\sqrt{\frac{k}{m}}$$

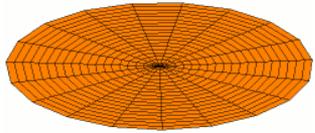
2 modes de vibrations :



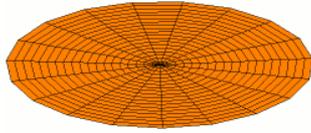
$$f_2 = 2\pi\sqrt{3\frac{k}{m}}$$

Modes propres d'une membrane circulaire

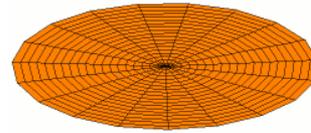
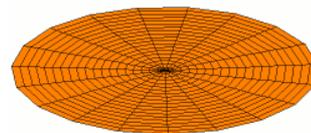
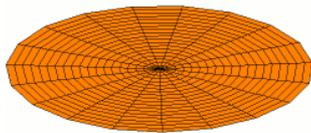
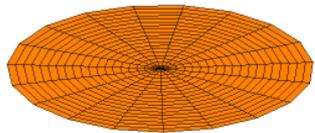
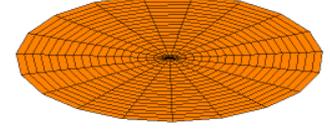
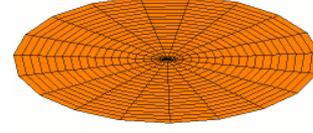
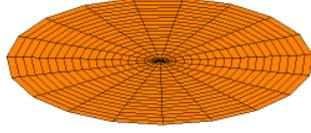
f_1



f_2



f_3 , ...



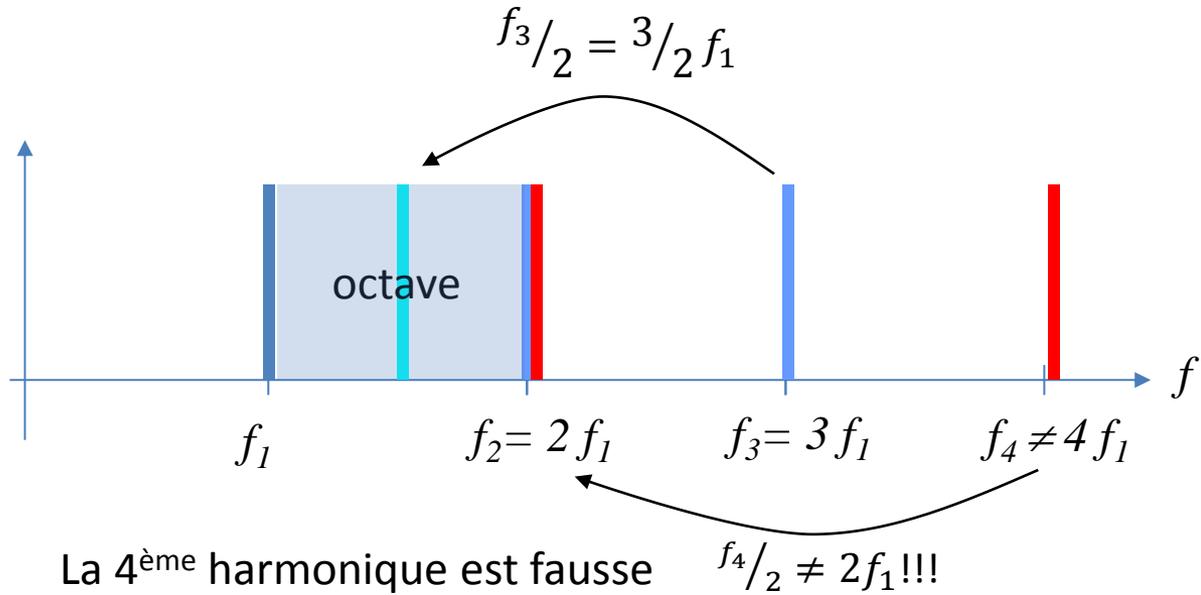
La fréquence des harmoniques (f_4, f_5, \dots) n'est plus un multiple du fondamental (f_1)

Instrument à partiels!

By Oleg Alexandrov (self-made with MATLAB) [Public domain], via Wikimedia Commons

Instruments à partiels : membrane

La quinte est toujours juste



La 4^{ème} harmonique est fausse $f_4/2 \neq 2f_1!!!$

→ Légère dissonance, affecte le timbre

Harmoniques et Partiels

Résumé :

Au moins deux grandes familles, ***cordes et vents***, produisent des sons basés sur la série harmonique.

L'importance de la série harmonique dans la construction des gammes en dérive, et en particulier le rôle essentiel de la première harmonique intéressante^(*), la quinte :

$$f_{\text{quinte}} = 3 f_{\text{fondamental}}$$

(*) La fréquence double, qui correspond à l'octave produit la même sensation de note que la fondamentale.

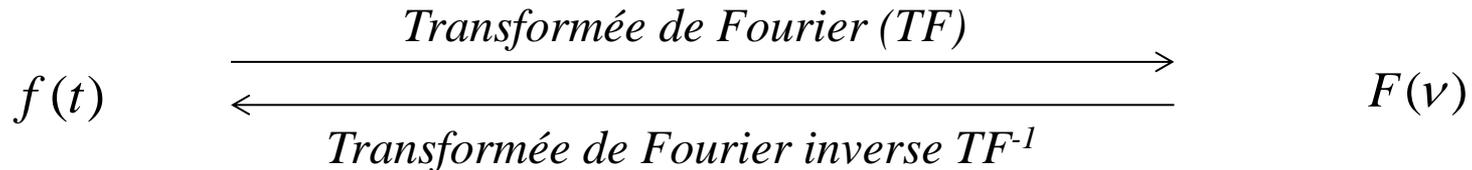
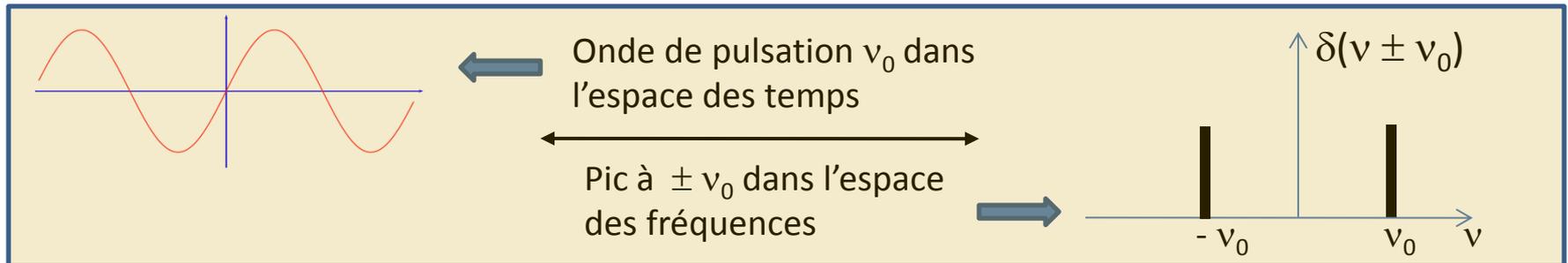
4. Analyse de Fourier (1)

Enoncé 1:

Le spectre $F(\nu)$ d'un signal sonore est la transformée de Fourier de sa réponse temporelle $f(t)$

Espace des temps
(forme d'onde = fichier .wav)

Espace des fréquences
(spectre)



$$FT[f(t)] = F(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-i2\pi\nu t} dt$$

$$FT^{-1}[F(\nu)] = f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(\nu)e^{i2\pi\nu t} d\nu$$

➡ Annexe A : exemple de calcul

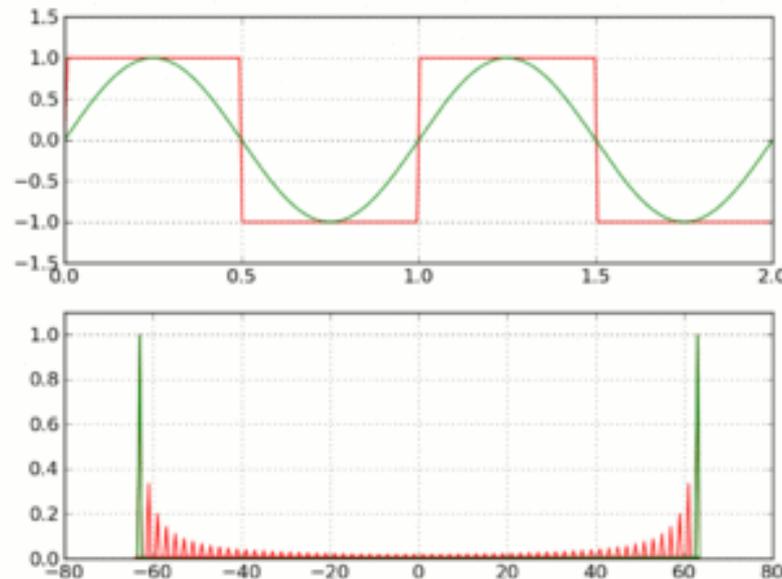
Enoncé 2 :

Tout signal périodique peut se décomposer en une somme de fonction sinusoïdales

✓ Signal carré:

Somme d'harmoniques impaires $n = 2k + 1$ d'amplitude $1, 1/3, 1/5, \dots$

$$\psi_{\text{carré}}(t) = \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin((2k+1)2\pi ft)}{2k+1} = \frac{4}{\pi} \left(\sin(2\pi ft) + \frac{1}{3} \sin(6\pi ft) + \frac{1}{5} \sin(10\pi ft) + \dots \right)$$

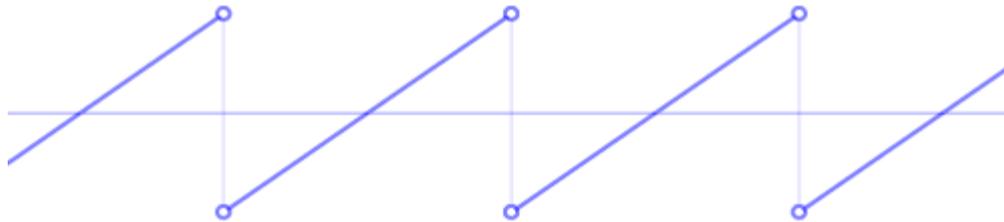


[Source animation : Wikipedia]

✓ **Signal en dents de scie:**

Toutes les harmoniques n d'amplitude $1, -1/2, 1/3, -1/4, \dots$

$$\Psi_{\text{dents de scie}}(t) = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin(2\pi n f t)}{n}$$



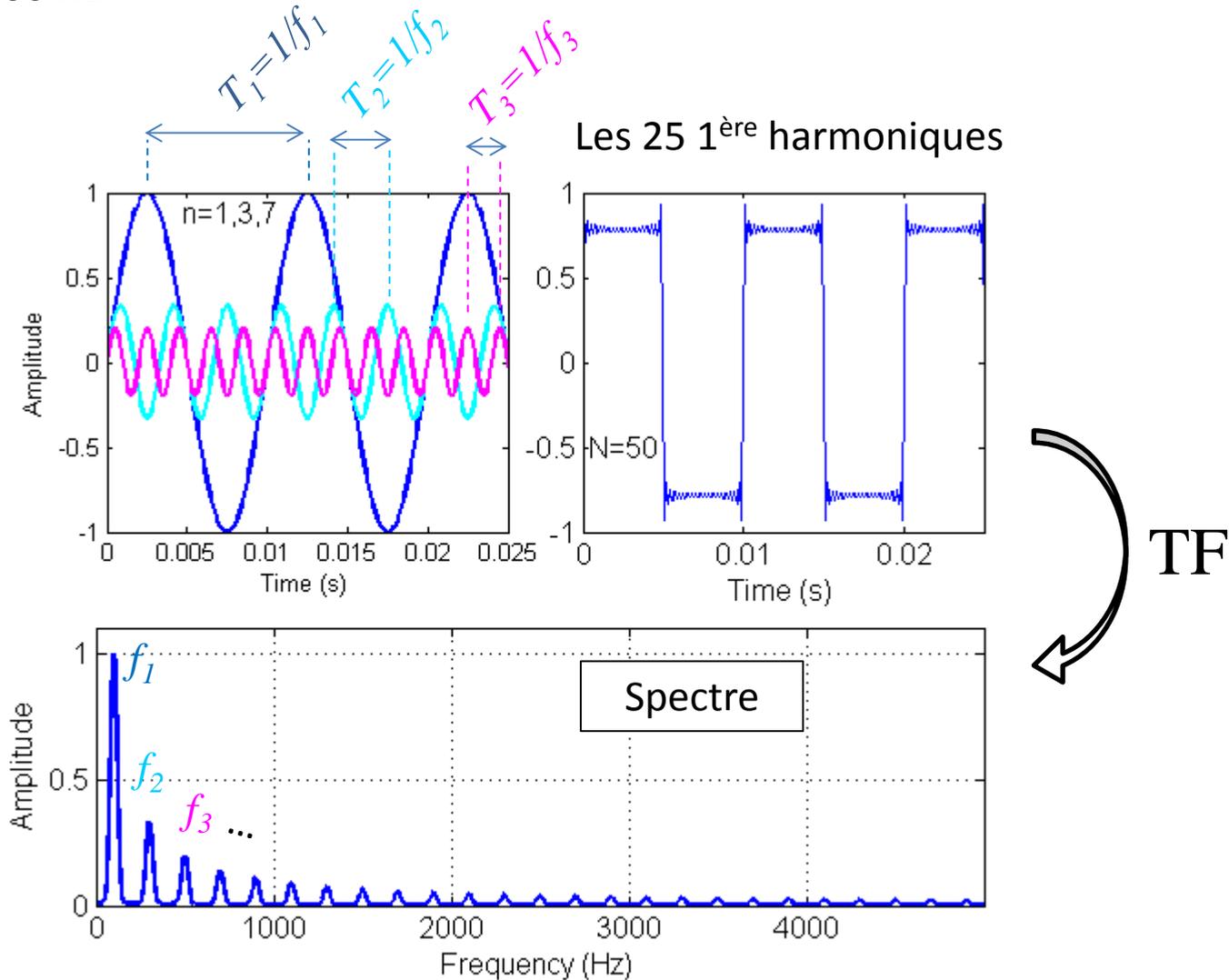
[Source animation : Wikipedia]

N = 0

Analyse de Fourier d'un signal carré : Résumé

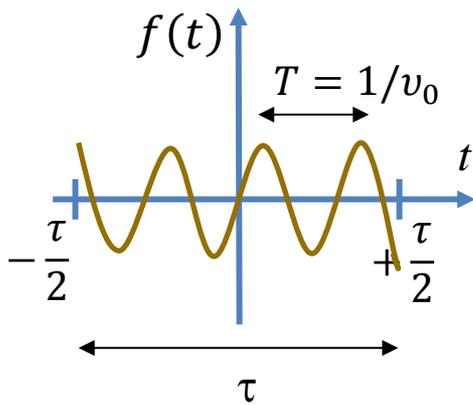
➔ Matlab : Entendre un signal carré et triangle
(fourier_transform.m)

Son à $f=100$ Hz



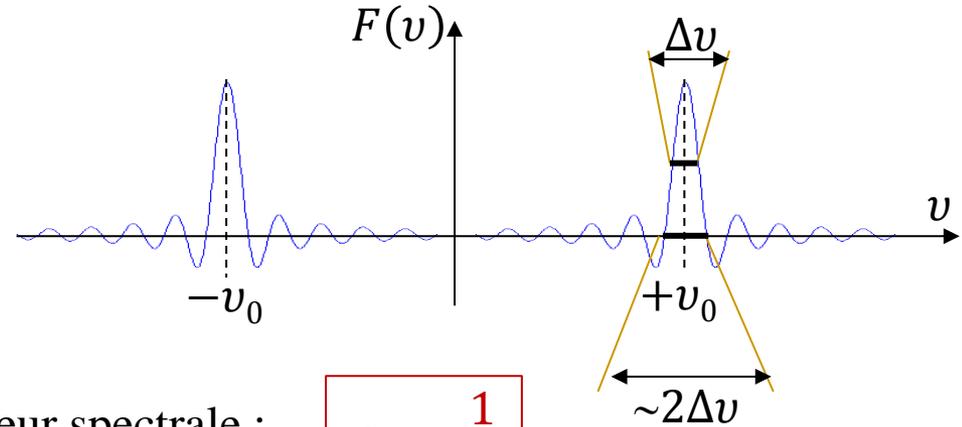
Analyse de Fourier d'un son bref

Train d'onde de durée τ



Transformée de Fourier →

Réponse spectrale élargie



Largeur spectrale :
(à mi-hauteur)

$$\Delta v \approx \frac{1}{\tau}$$



Les sons de courte durée ont une grande largeur spectrale !

➔ Ableton Live : analyse spectrale d'un son bref

Exemples :

1. On joue un La_0 ($\nu_0=27.5$ Hz) avec une durée de 0.1s. Calculer les fréquences max et min nécessairement contenues dans cette note.

2. Même question pour le La_5 ($\nu_5= 880$ Hz)

Exemples :

1. On joue un La_0 ($\nu_0=27.5$ Hz) avec une durée de 0.1s. Calculer les fréquences max et min nécessairement contenues dans cette note.

$$\Delta\nu = \frac{1}{\tau} = 10 \text{ Hz}$$

$2\Delta\nu$ au passage à zéro

$$\nu_{min} = \nu_0 - \frac{2\Delta\nu}{2} = 17.5 \text{ Hz}$$

$$\nu_{max} = \nu_0 + \frac{2\Delta\nu}{2} = 37.5 \text{ Hz} \longrightarrow \text{Correspond au Re-Re}^\# !!$$

2. Même question pour le La_5 ($\nu_5= 880$ Hz)

$$\begin{array}{l} \nu_{min} = 870 \text{ Hz} \longrightarrow La_5^- \\ \nu_{max} = 890 \text{ Hz} \longrightarrow La_5^+ \end{array} \longrightarrow \text{Cela reste un } La_5$$

- ✓ Les sons aigus peuvent être joués très brièvement tout en conservant la note
- ✓ La gamme spectrale d'une note grave jouée brièvement peut s'étendre sur plusieurs notes!!

Modes propres d'une onde stationnaire

- ✓ Ondes stationnaires : $\psi(x, t) = F(x)G(t) = A \cos(2\pi f t + \varphi_0) \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda} x + \phi_0\right)$

➡ Séparation des variables spatiale et temporelle

- ✓ Décomposition en modes propres : $\psi(t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(2\pi f_n t + \varphi_n) \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda_n} x + \phi_0\right)$

Ou bien :

$$\psi(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos 2\pi f_n t + b_n \sin 2\pi f_n t] \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda_n} x + \phi_0\right)$$

- ✓ ϕ_0, λ_n (et donc f_n) sont donnés par les *conditions aux limites*

➡ Modes propres de vibration

- ✓ a_n et b_n (ou A_n et φ_n) sont donnés par les *conditions aux initiales* :

$$a_n = \frac{2}{L} \int_0^L \psi(x, 0) \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda_n} x + \phi_0\right) dx ,$$



Champ de déplacement initial

$$b_n = \frac{1}{\pi L f_n} \int_0^L \left[\frac{\partial \psi(x, t)}{\partial t} \right]_{t=0} \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda_n} x + \phi_0\right) dx$$



Vitesse initiale

Modes actifs et décroissance ➡ Timbre d'un instrument !!!

Timbre d'un instrument

Timbre : Couleur, Chaleur d'un son,

Ensemble des caractéristiques qui permettent d'identifier un instrument

...

Il depend :

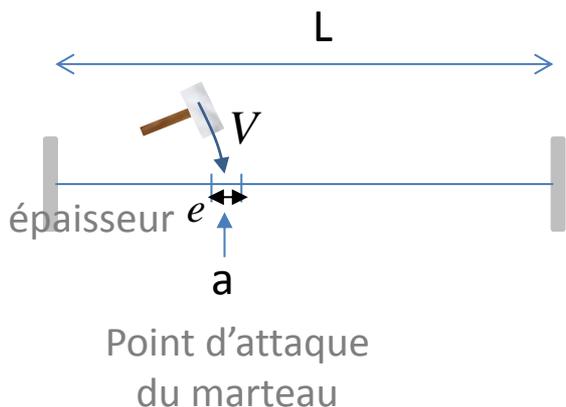
De la décomposition en harmoniques du spectre sonore

De la puissance sonore des harmoniques

De la table d'harmonie qui modifie l'enveloppe spectrale du son

...

Corde frappée : Le piano



Le déplacement de la corde :

$$\Psi_{frappée}(x, t) = \frac{2Ve}{\pi v} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2\pi n f_n t)}{n} \sin\left(\frac{n\pi a}{L}\right) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

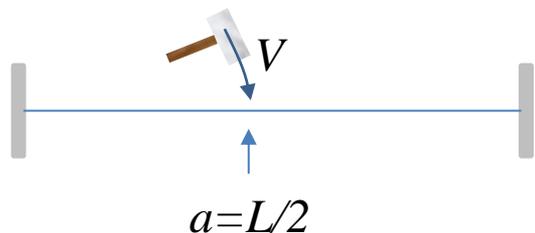
Vitesse de propagation d'une onde dans la corde

➔ Toutes les harmoniques sont actives, mais...

... Le déplacement de la corde $\psi(x,t)$, et donc le spectre sonore $\Psi(f)$ des harmoniques, dépend de la position du marteau

La position du marteau sur la corde modifie le timbre

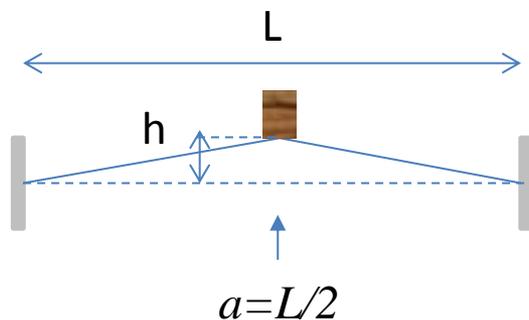
Exemple: marteau en $a=L/2$



➔ Seules les harmoniques impaires $n=2p+1$ sont actives :

$$\Psi_{frappée}(x, t) = \frac{2Ve}{\pi v} \sum_{p=1}^{\infty} (-1)^p \frac{\sin(2\pi n f_n t)}{n} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

Corde pincée : Le clavecin



Harmoniques impaires : $n = 2p + 1$, avec p entier

$$\Psi_{pincée}(x, t) = \frac{8h}{\pi^2} \sum_{p=1}^{\infty} (-1)^p \frac{\sin(2\pi n f_n t)}{n^2} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

➡ Comme pour le piano, en pinçant en $L/2$ seules les harmoniques impaires $n=1, 3, \dots$ sont actives

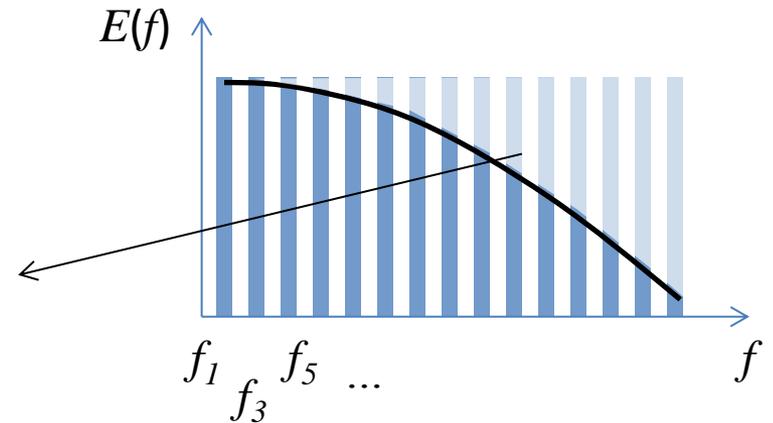
Qu'est ce qui explique (en partie) la différence de timbre entre un piano et un clavecin ???

La puissance sonore des harmoniques !!!

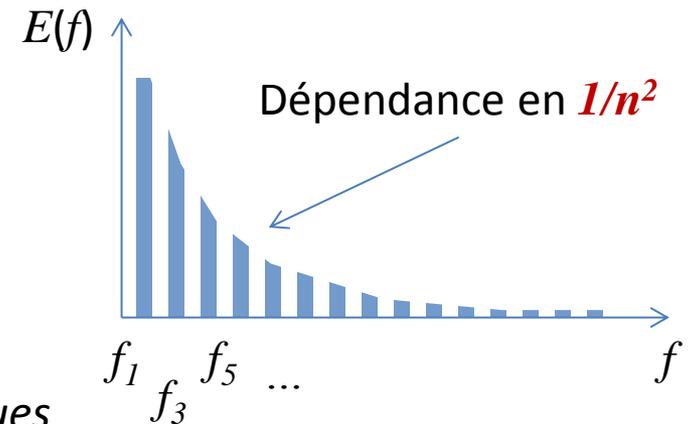
Puissance sonore (ici l'énergie E_n):

✓ **Corde frappée (piano) :** $E_n = \frac{V^2 e^2 T}{L}$
Indépendant de n en principe, mais...

...le diamètre et de la rigidité de la corde limitent la création d'harmoniques élevées



✓ **Corde pincée (clavecin) :** $E_n = \frac{16Th^2}{\pi^2 L} \frac{1}{n^2}$



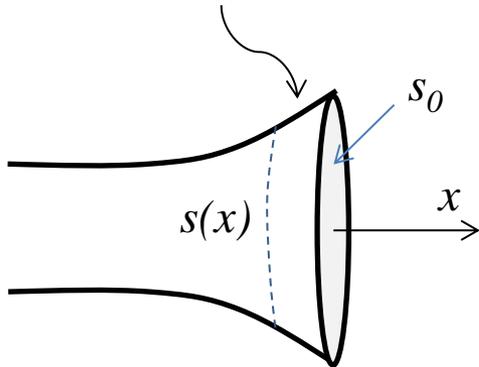
→ Le son du piano est plus feutré, car riche en harmoniques

→ Le son du clavecin est plus sec, car pauvre en harmoniques

Mais attention, la table d'harmonie joue un rôle très important dans la couleur donnée au son

Le pavillon du saxophone :

a : paramètre d'ouverture du cône



Les effets de bord transforment l'équation de propagation de D'Alembert :

$$\text{Ex : } s(x) = s_0 e^{ax} \quad \longrightarrow \quad \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \frac{1}{v_{air}^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} + a \frac{\partial \psi}{\partial x} = 0$$

Vitesse de propagation du son dans l'air

Terme d'amortissement

✓ vitesse des ondes sonores dans le pavillon :

$$V_{pavillon} = \frac{V_{air}}{\sqrt{1 - \left(\frac{f_c}{f}\right)^2}}$$

Or $V_{pavillon} > 0$!!!

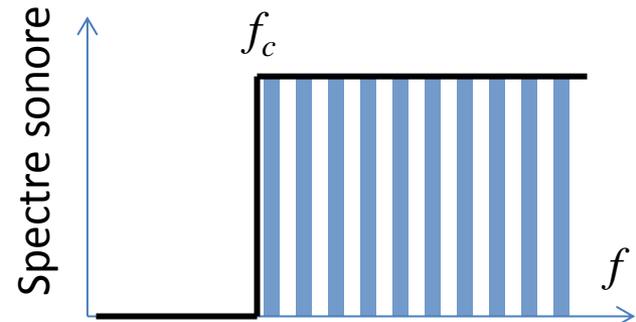


Propagation possible uniquement pour $f > f_c$

Fréquence de coupure :

$$f_c = \frac{a V_{air}}{4\pi}$$

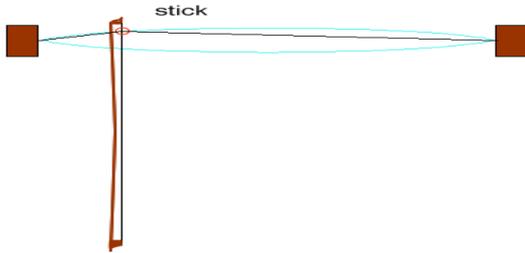
Le pavillon agit comme un filtre



Violon: influence des paramètres gestuels sur le timbre

[F. Kaiser, Mémoire Master 2006. IRCAM & Univ. Paris VI]

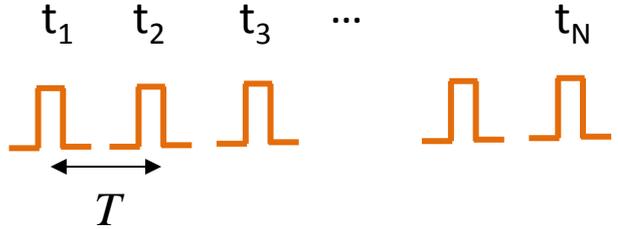
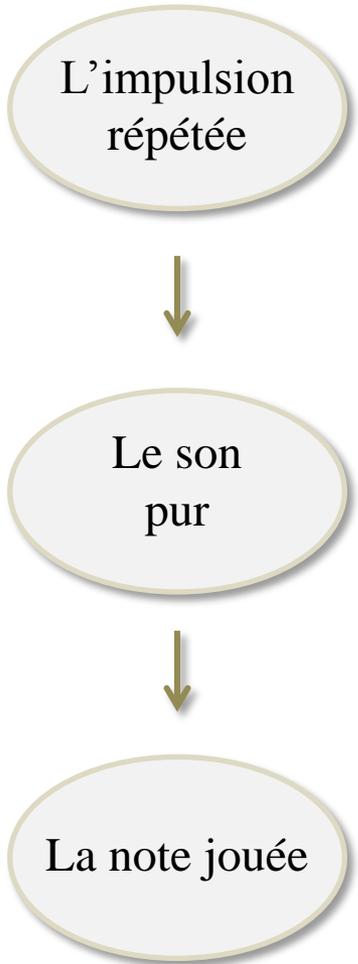
Vibration de Helmholtz



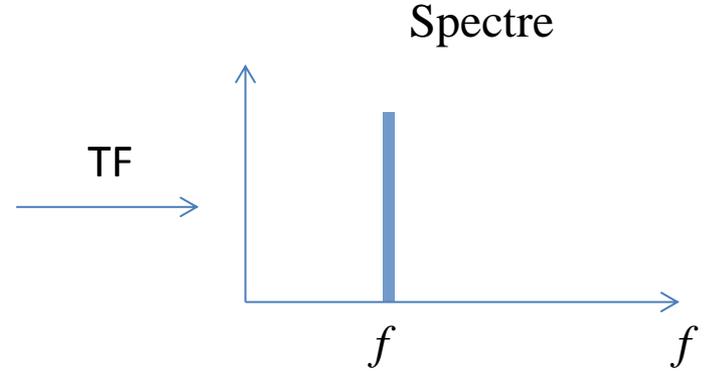
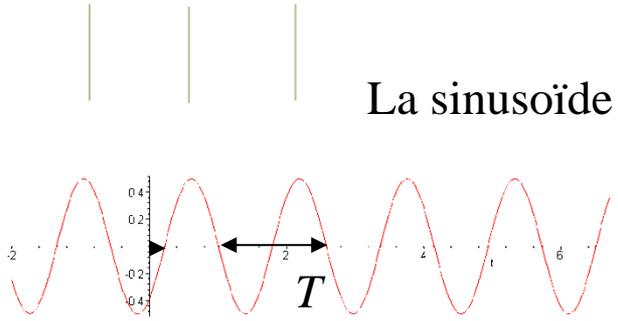
- ✓ La rigidité de la corde modifie la forme du coin de Helmholtz :
 - Plus le coin est aiguisé plus le son est Brillant

Paramètres gestuels	Timbre
Augmentation de la pression de l'archet	Les partiels HF sont accentués, le son est donc plus brillant
Augmentation de la vitesse d'archet	Les partiels HF sont atténués, le son est donc moins brillant
Position de l'archet	Influence moindre
Inclinaison	Son sensiblement plus brillant

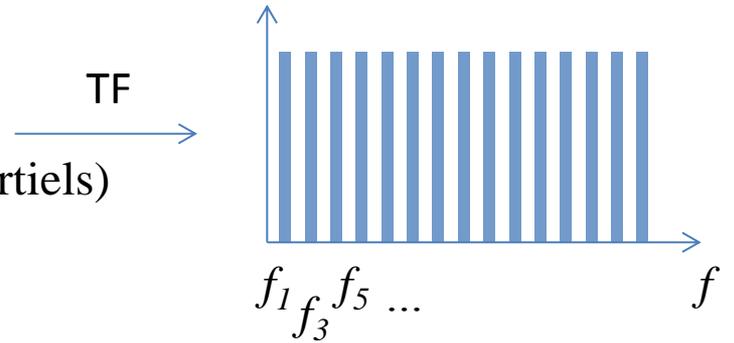
Du son à la musique



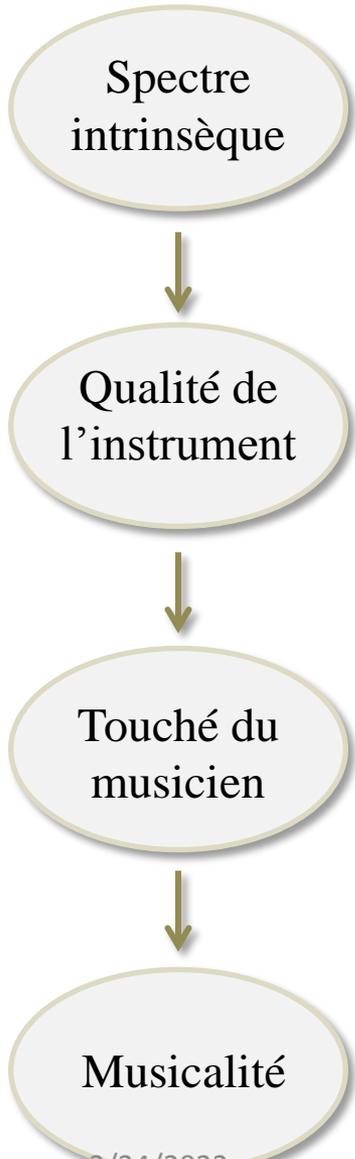
$$f(\text{Hz}) = \text{Nb impulsions/s}$$



Somme de sinusoïdes
Fondamentale + harmoniques (ou partiels)



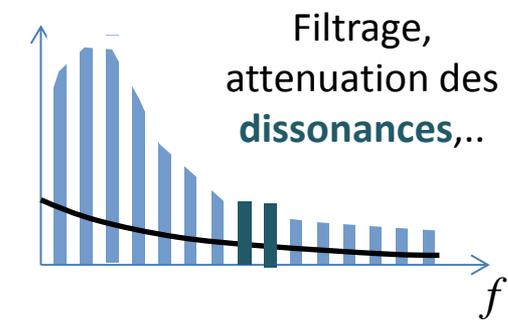
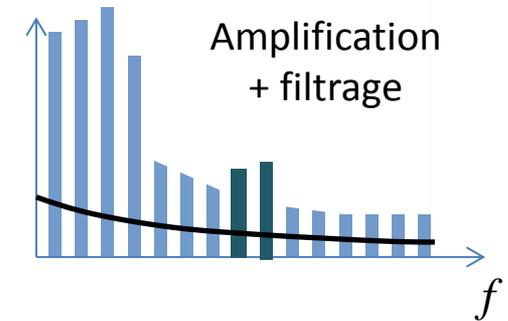
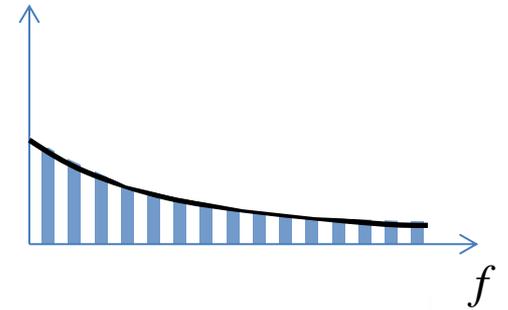
Du son à la musique



Traitement mathématique de la réponse spectrale

La lutherie, les cordes, la table d'harmonie,....

Action sur la hanche au saxo,
Position des lèvres sur le bec à la trompette,
Touché des cordes à la guitare,
...



Annexe A : Calcul des modes propres d'une corde

Modes propres d'une corde vibrante:

La corde est fixée à ses 2 extrémités

→ Ondes stationnaires : $\psi(x, t) = X(x)T(t)$

↳ déplacement de la corde.

$$\psi(x, t) = A \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}x + \phi_0\right) \cos(2\pi f t + \varphi_0)$$



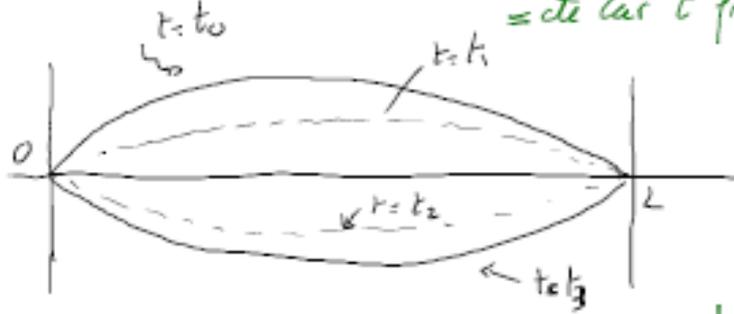
Conditions aux Limites:

1) en $x=0$: $\psi(0, t) = 0$ quelque soit t .

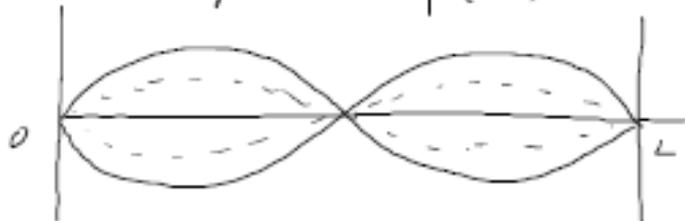
$$\psi(0, t) = A \cos \phi_0 \cos(2\pi f t + \varphi_0) \underset{(\forall t)}{=} 0 \rightarrow \cos \phi_0 = 0 \rightarrow \phi_0 = \frac{\pm \pi}{2}$$

on prend $\phi_0 = -\frac{\pi}{2} \rightarrow \psi(x, t) = A \sin \frac{2\pi}{\lambda} x \cdot \cos(2\pi f t + \varphi_0)$

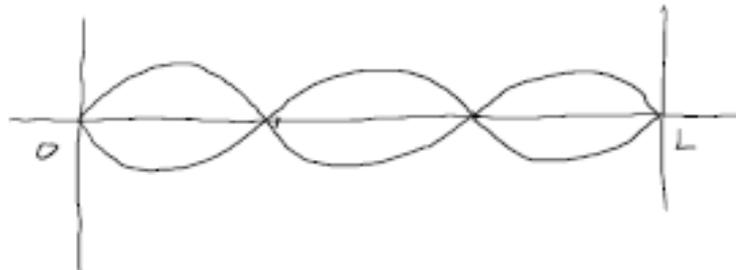
$n=1$ Mode Fondamental $\psi_1(x,t) = A_1 \cos(2\pi f_1 t + \varphi_1) \sin \frac{\pi}{L} x$, $\lambda_1 = 2L$
 = cte car t fixe



$n=2$ 1^{ère} harmonique = $\psi_2(x,t) = C^{t_2} \cdot \sin \frac{2\pi}{L} x$, $\lambda_2 = L$



$n=3$



$\psi_3(x,t) = C^{t_3} \sin \frac{3\pi}{L} x$, $\lambda_3 = \frac{2}{3} L$

De façon générale, le mouvement de la corde est la somme de tous les modes propres:

$$\Psi(x, t) = \sum_n A_n \cos(2\pi f_n t + \phi_n) \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda_n} x\right)$$

Les conditions initiales (façon dont on active la corde à $t=0$) permettant de déterminer les A_n et les ϕ_n est donc l'ensemble des modes propres actifs avec quelle Amplitude, quelle Fréquence, et quel déphasage.

Annexe B : analyse de Fourier

$$FT[\delta(\nu - \nu_0)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(\nu - \nu_0) e^{i2\pi\nu t} d\nu = f(t)$$

↓
≠ 0 only for $\nu = \nu_0$

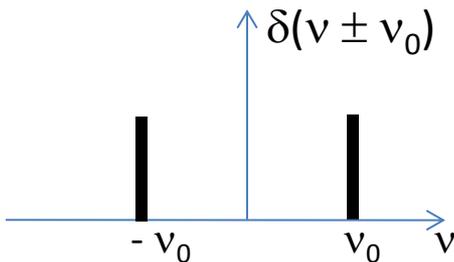
The intergral is ≠ 0 only for $\nu = \nu_0$ → $f(t) = e^{i2\pi\nu_0 t}$

$$\Rightarrow FT[\delta(\nu - \nu_0)] = e^{i2\pi\nu_0 t}$$

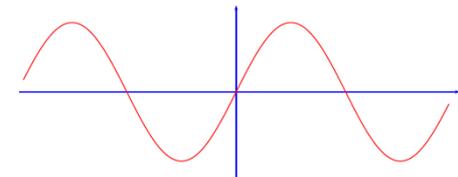
$$Re\{e^{i2\pi\nu_0 t}\} = \cos 2\pi\nu_0 t$$

Pic à $\pm \nu_0$ dans l'espace des fréquences

Onde de pulsation ν_0 dans l'espace des temps



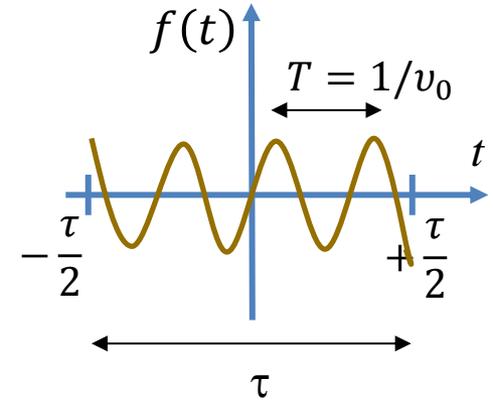
FT



Annexe C : spectre d'un son bref

Train d'onde de durée τ

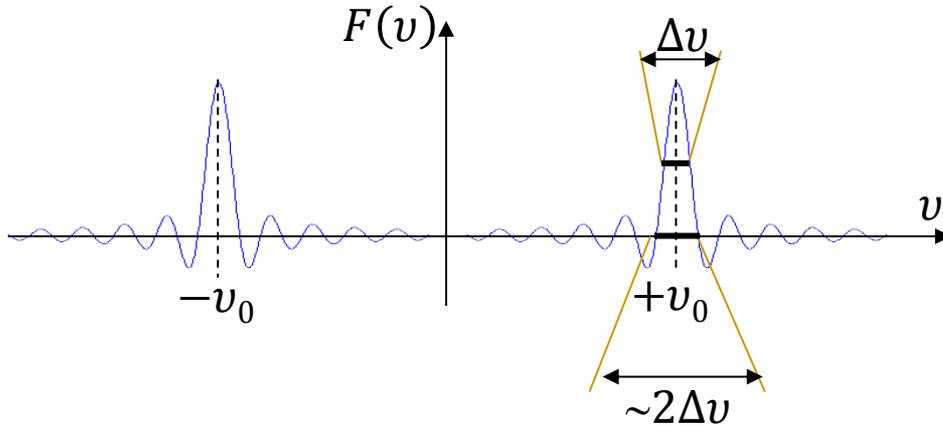
$$\begin{cases} f(t) = \cos 2\pi\nu_0 t & \text{entre } t \in \left[-\frac{\tau}{2}; +\frac{\tau}{2}\right] \\ f(t) = 0 & \text{ailleurs} \end{cases} \quad -\frac{\tau}{2}$$



Transformée de Fourier

$$F(\nu) = TF\{f(t)\} = \frac{\tau}{2} [\text{sinc } \pi(\nu_0 - \nu)t + \text{sinc } \pi(\nu_0 + \nu)t]$$

$$\text{sinc } x = \frac{\sin x}{x}$$



Largeur spectrale :
(à mi-hauteur)

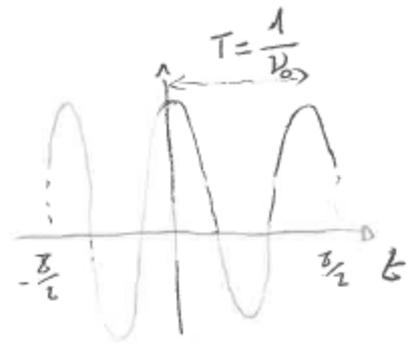
$$\Delta\nu \approx \frac{1}{\tau}$$

Les sons de courte durée ont une grande largeur spectrale !

Speche en Frequence d'un son bref

$$f(t) = \cos 2\pi\nu_0 t \quad \text{si } t \in \left] -\frac{\tau}{2} ; +\frac{\tau}{2} \right[$$

$$f(t) = 0 \quad \text{sinon.}$$



1) → train d'onde de durée τ

2) Transformée de Fourier:

$$TF\{f(t)\} = F(\nu) = \int_{-\tau/2}^{\tau/2} \cos 2\pi\nu_0 t e^{-2i\pi\nu t} dt$$

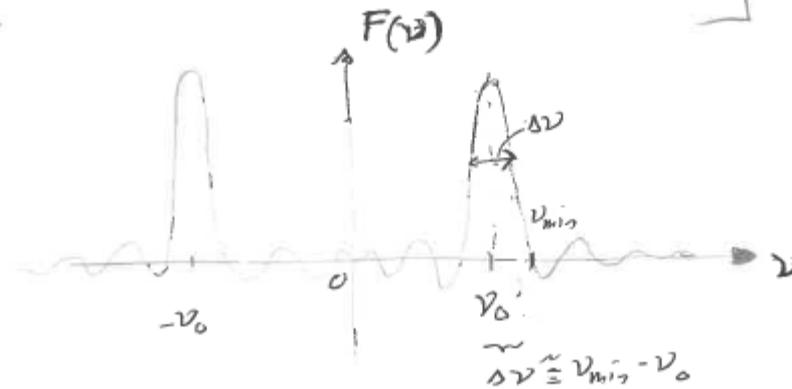
$$F(\nu) = \int_{-\tau/2}^{\tau/2} \frac{e^{2i\pi\nu_0 t} + e^{-2i\pi\nu_0 t}}{2} e^{-2i\pi\nu t} dt = \frac{1}{2} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} \left(e^{+2i\pi(\nu_0 - \nu)t} + e^{-2i\pi(\nu_0 + \nu)t} \right) dt$$

$$F(\nu) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2i\pi(\nu_0 - \nu)} \underbrace{\left[\begin{matrix} e^{i\pi(\nu_0 - \nu)\tau} & -i\pi(\nu_0 - \nu)\tau \\ e^{-i\pi(\nu_0 - \nu)\tau} & -e^{-i\pi(\nu_0 - \nu)\tau} \end{matrix} \right]}_{2i \sin \pi(\nu_0 - \nu)\tau} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2i\pi(\nu_0 + \nu)} \underbrace{\left[\begin{matrix} e^{i\pi(\nu_0 + \nu)\tau} & -i\pi(\nu_0 + \nu)\tau \\ e^{-i\pi(\nu_0 + \nu)\tau} & -e^{-i\pi(\nu_0 + \nu)\tau} \end{matrix} \right]}_{2i \sin \pi(\nu_0 + \nu)\tau}$$

$$F(\nu) = \frac{\tau}{2} \frac{\sin \pi(\nu_0 - \nu)\tau}{\pi(\nu_0 - \nu)\tau} + \frac{\tau}{2} \frac{\sin \pi(\nu_0 + \nu)\tau}{\pi(\nu_0 + \nu)\tau}$$

$$F(\nu) = \frac{\tau}{2} \left[\operatorname{sinc} \pi(\nu_0 - \nu)\tau + \operatorname{sinc} \pi(\nu_0 + \nu)\tau \right]$$

$$\operatorname{sinc} x = \frac{\sin x}{x}$$



$F(\nu)$ contient deux pics aux fréquences $\pm \nu_0$ correspondant à la fréquence du train d'onde émis.

Toutefois, comme le signal sinusoïdal est borné dans le temps, le spectre en fréquence contient également des satellites de fréquences disposés autour de ν_0 .

3/ Largeur $\Delta \nu$ de la raie principale :

La largeur totale du sinc est donnée par l'écart $\Delta \nu$ entre le maximum principal et le 1^{er} minimum.

$$1^{\text{er}} \text{ Minimum} = \frac{\sin x}{x} = 0 \Rightarrow x = \pi \Rightarrow \pi z (\nu_0 - \nu_{\min}) = \pi$$

$$\Rightarrow \nu_0 - \nu_{\min} = \boxed{\Delta \nu = \frac{1}{z}}$$

\Rightarrow plus le train d'onde est court (z petit), plus large est le spectre en fréquence