TD n°3 : Variables aléatoires discrètes

Exercice 1. Une urne contient initialement une boule noire et une boule blanche et on répète l'expérience aléatoire suivante : on tire une boule, on la remet dans l'urne et on ajoute aussitôt une boule supplémentaire de la même couleur. Ce modèle d'urne est connu sous le nom d'urne de Pólya. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on note N_k le nombre de boules blanches dans l'urne après k tirages. Montrer par récurrence que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, N_k suit la loi uniforme $\mathcal{U}(\{1, \cdots, k+1\})$.

Exercice 2. On lance n fois une pièce équilibrée. Quelle est la probabilité d'obtenir strictement plus de piles que de faces ?

Exercice 3. Soit $p \in]0,1[$ et $X_1, \cdots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes et de même loi définies pour tout $k \in \{1, \cdots, n\}$ par : $\mathbb{P}(X_k = 1) = p$ et $\mathbb{P}(X_k = -1) = 1 - p$. On pose pour tout $k \in \{1, \cdots, n\}$: $\Pi_k = \Pi_{i=1}^k X_i$ et :

$$u_k = \mathbb{P}(\Pi_k = 1) \text{ et } v_k = \mathbb{P}(\Pi_k = -1).$$

1. a) Montrer que pour tout $k \in \{1, \cdots, n-1\}$:

$$u_{k+1} = pu_k + (1-p)v_k \text{ et } v_{k+1} = (1-p)u_k + pv_k.$$

   b) Déterminer, grâce à $u_k + v_k$ et $u_k - v_k$, une expression explicite de u_k et v_k en fonction de k. Interpréter le résultat pour de grandes valeurs de k.
2. Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que les variables aléatoires Π_1 et Π_2 soient indépendantes.

Exercice 4. Soient U et V deux variables aléatoires discrètes définies sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, à valeurs dans $\mathbb{Z}$, indépendantes, admettant un moment d'ordre 2. On suppose U centrée. On définit les deux variables aléatoires discrètes X et Y par :

$$X = (-1)^V U \quad Y = V.$$

1. (a) Justifier l'existence de la moyenne de X et la calculer.
   (b) Justifier l'existence de la moyenne de XY et la calculer.
   (c) Que vaut la covariance de X et de Y ?
   (d) Les variables X^2 et Y^2 sont-elles indépendantes ?
2. Dans cette question, on suppose que la loi de U est donnée par :

$$\mathbb{P}(U = -2) = \frac{1}{3}, \quad \mathbb{P}(U = 1) = \frac{2}{3}$$

   et celle de V par :

$$\mathbb{P}(V = 1) = \frac{1}{2}, \quad \mathbb{P}(V = 2) = \frac{1}{2}.$$

   (a) Calculer $\mathbb{E}(X^3)$ et $\mathbb{E}(U^3)$.
   (b) Calculer $\mathbb{E}\left(\mathbf{1}_{\{V=1\}} X^3\right)$.
   (c) Les variables X et Y sont elles indépendantes ?

Exercice 5. Soit X une variable aléatoire de loi géométrique de paramètre p. Montrer que la loi est sans mémoire, i.e.

$$\forall (k, n) \in \mathbb{N}^{*2}, \mathbb{P}(X > n + k | X > k) = \mathbb{P}(X > n).$$

Exercice 6. Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\{0,\cdots,n\}$ dont la loi est définie par : $\mathbb{P}(X=k)=p_k, \forall k\in\{0,\cdots,n\}$. On considère la fonction génératrice de X : $G_X(s)=\mathbb{E}(s^X)=\sum_{k=0}^{n} s^k\,\mathbb{P}(X=k)$.

1. Déterminer la fonction génératrice d'une variable aléatoire suivant une loi de Bernoulli de paramètre p ; une loi binomiale de paramètres n et p.
2. Démontrer que deux variables aléatoires discrètes finies ont même loi si et seulement si $G_X=G_Y$.
3. Montrer que $\mathbb{E}(X)=G'_X(1)$ et $\mathbb{V}(X)=G''_X(1)+G'_X(1)-G'_X(1)^2$. Retrouver l'espérance et la variance d'une variable aléatoire suivant une loi binomiale.

Exercice 7. Soit, sur l'espace probabilisé $(\Omega,\mathcal{A},\mathbb{P})$, une suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires indépendantes, de même loi géométrique sur $\mathbb{N}^*$ de paramètre $p\in]0,1[$. On note pour $n\in\mathbb{N}^*$:

$$S_n=\sum_{k=1}^{n} X_k$$

Calculer la moyenne $\mathbb{E}\left(\frac{S_n}{n}\right)$ et la variance $\mathbb{V}\left(\frac{S_n}{n}\right)$ de la variable aléatoire $\frac{S_n}{n}$.