TD n°2 : Indépendance et conditionnement

Exercice 1. On lance deux dés à 6 faces et on considère les événements
- A : "le résultat du premier dé est impair"
- B : "le résultat du second dé est pair"
- C : "les résultats des deux dés sont de même parité"

Montrer que les événements A, B et C sont deux à deux indépendants mais que

$$\mathbb{P}(A \cap B \cap C) \neq \mathbb{P}(A)\,\mathbb{P}(B)\,\mathbb{P}(C).$$

Exercice 2. On jette trois fois une pièce de monnaie et on considère la suite des résultats. On pose donc $\Omega = \{p, f\}^3$ que l'on munit de la probabilité uniforme. On considère les événements
- $A = \{ppp, ppf, pfp, pff\}$
- $B = \{ppp, ppf, pfp, fpp\}$
- $C = \{ppp, fpf, ffp, fff\}$

Montrer que $\mathbb{P}(A \cap B \cap C) = \mathbb{P}(A)\,\mathbb{P}(B)\,\mathbb{P}(C)$. Cette famille d'événements est-elle indépendante ?

Exercice 3. Soit A, B et C trois événements indépendants. Montrer que A est indépendant de $B \cup C$.

Exercice 4. Un événement certain Ω peut être partitionné en quatre événements A, B, C, D d'un côté, et en trois événements E, F, G de l'autre. Les probabilités des intersections des événements de ces deux partitions sont données ci-dessous.

	A	B	C	D
E	0	0.3	0.2	0.1
F	0.1	0	0.1	0
G	0.1	0.1	0	0

Quelles sont les probabilités de chacun des événements ? Calculer les probabilités conditionnelles $\mathbb{P}^G(A)$, $\mathbb{P}^E(C)$ et $\mathbb{P}^{A\cup B}(E \cup F)$.

Exercice 5. Soient $A_1, \cdots, A_n$ n événements d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. On les suppose mutuellement indépendants et de probabilités respectives $p_i = \mathbb{P}(A_i)$. Donner une expression simple de $\mathbb{P}(A_1 \cup \cdots \cup A_n)$ en fonction de $p_1, \cdots, p_n$.

Exercice 6. Probabilités conditionnelles en cascade
Une urne contient n boules rouges et n blanches. On tire deux par deux, sans remise, les boules jusqu'à vider l'urne. Quelle est la probabilité que l'on tire une boule de chaque couleur à chaque tirage ?

Exercice 7. Modèle d'urnes
Deux urnes A et B contiennent respectivement 6 boules blanches et 5 noires d'une part, 4 blanches et 8 noires d'autre part. On transfère au hasard deux boules de l'urne B dans l'urne A puis on tire ensuite une boule dans l'urne A. Calculer

1. la probabilité que la boule tirée soit blanche.
2. la probabilité que l'une au moins des boules transférées soit blanche sachant que la boule tirée est blanche.

Exercice 8. Un modèle démographique simple
Dans une population donnée, on suppose que la probabilité p_k pour qu'une famille ait k enfants est donnée par :

$$p_0 = p_1 = a \text{ et, pour } k \geq 2,\ p_k = (1-2a)2^{-(k-1)},$$

où a est un réel strictement compris entre 0 et 1.On suppose de plus que la probabilité d'avoir une fille ou un garçon lors d'une naissance est la même.

1. Vérifier que la famille des $(p_k)_{k\in\mathbb{N}}$ définit bien une probabilité.
2. Quelle est la probabilité pour qu'une famille ayant deux garçons ait deux enfants seulement ?
3. Quelle est la probabilité pour qu'une famille ait deux filles sachant qu'elle a deux garçons ?

Exercice 9. Soit $n > 1$ un entier fixé. On choisit de manière équiprobable un entier x dans $\{1, \cdots, n\}$. Pour tout entier $m \leq n$, on note A_m l'événements "m divise x". On note également B l'événement "x est premier avec n". Enfin, on note $p_1, \cdots, p_r$ les diviseurs premiers de n.

1. Exprimer B en fonction des A_{p_k}.
2. Pour tout entier naturel m qui divise n calculer $\mathbb{P}(A_m)$.
3. Montrer que les événements $A_{p_1}, \cdots, A_{p_r}$ sont indépendants.
4. En déduire $\mathbb{P}(B)$.
5. On note $\phi(n)$ le nombre d'entier compris entre 1 et n qui sont premiers avec n. Montrer que

$$\phi(n) = n \prod_{k=1}^{r} \left(1 - \frac{1}{p_k}\right).$$

Exercice 10. On dispose de 100 dés dont 25 sont pipés. Pour chaque dé pipé, la probabilité d'obtenir le 6 lors d'un lancer vaut $\frac{1}{2}$.

1. On tire au hasard un dé parmi les 100 dés. On lance ce dé et on obtient 6. Quelle est la probabilité que ce dé soit pipé ?
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On tire au hasard un dé parmi 100 dés. On lance ce dé n fois et on obtient n fois le chiffre 6. Quelle est la probabilité p_n pour que ce dé soit pipé. Interpréter le résultat.