TD n°1 : Espaces probabilisés

Exercice 1. Soit A, B et C trois événements. Ecrire en fonction de ces trois événements les événements :

1. A et B ont lieu mais pas C ;
2. A seul a lieu ;
3. exactement deux de ces événements ont lieu ;
4. au moins deux de ces événements ont lieu ;
5. un de ces événements et un seul a lieu ;
6. au moins un de ces événements a lieu ;
7. aucun de ces événements n'a lieu ;
8. pas plus de deux de ces événements n'ont lieu.

Exercice 2. Soit X et Y deux variables aléatoires représentant les coordonnées cartésiennes d'un point M pris au hasard sur un plan muni d'un repère orthonormé $(\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{Oy})$. Soit (R, θ) les coordonnées polaires de ce point. On suppose que $\{M = 0\} = \emptyset$ et on pose $X = R\cos\theta$ et $Y = R\sin\theta$ avec $R > 0$ et $0 \leq \theta < 2\pi$.

1. Compléter les égalités ci-dessous en remplaçant les $\ldots$ par des inégalités larges ou strictes et les lettres a, b, c par des nombres :
$\{XY \geq 0\} - \{(X \geq 0) \cap (Y \geq 0)\} = \{a \leq \theta \ldots 3\pi/2\}$
$\{X = Y\} - \{\theta = 5\pi/4\} = \{\theta = a\}$
$\{X > 0\} \triangle \{Y < X\} = \{a \leq \theta < b\} \cup \{5\pi/4 \ldots \theta \ldots 3\pi/2\}$
2. Ecrire les événements suivants en fonction de R et θ : $\{Y > 0\}$, $\{X = Y\}$, $\{X + Y > 0\}$, $\{X^2 + Y^2 \leq 1\}$ et $\{Y \leq |X|\}$.

Exercice 3. Soit X et$Y$ deux variables aléatoires réelles quelconques, soit $\max = \max(X, Y)$ et $\min = \min(X, Y)$. Soit s et t des nombres quelconques. Compléter les formules ci-dessous en remplaçant les $\ldots$ par un symbole de réunion, d'intersection ou par une inégalité large ou stricte :
$\{\max > t\} = \{X > t\} \ldots \{Y > t\}$
$\{\min \ldots s\} = \{X < s\} \cup \{Y < s\}$
$\{(\min < s) \cap (\max < t)\} = \{\max < t\} - \{(\min \ldots s) \cap (\max < t)\}$
$\{(X > t) \cap (Y < s)\} \subseteq \{(X - Y) \ldots (t - s)\}$
$\{X + Y > t\} \subseteq \{(X > t/2\} \ldots \{Y > t/2\}$

Exercice 4. Soit $a < c < b < d$. Compléter la formule :

$$\{X \in [a, b[\} \triangle \{X \in [c, d[\} = \{X \in [\ldots, \ldots[\} \cup \{X \in [\ldots, \ldots[\}$$

Exercice 5. Soit A un événement aléatoire. On appelle variable aléatoire indicatrice de A une variable aléatoire $\mathbb{1}_A$ qui vaut 1 si A est réalisé et 0 sinon

1. Exprimer en fonction de $\mathbb{1}_A$ et $\mathbb{1}_B$ les variables $\mathbb{1}_{A\cap B}$, $\mathbb{1}_{A\triangle B}$ et $\mathbb{1}_{A\cup B}$.
2. Que dire de A et B si $\mathbb{1}_A \leq \mathbb{1}_B$?

Exercice 6. On enregistre le nombre de passagers par voiture passant par un poste de péage un jour de retour de vacances. Soit T le nombre de voitures passées par ce péage ce jour-là. Soit X_n le nombre de passagers de la $n^{\text{ème}}$ voiture, conducteur compris. Que représentent les variables aléatoires :

$$\sum_{n=1}^{T} X_n \quad ; \quad \sum_{n=1}^{T} \mathbb{1}_{\{X_n \geq 4\}} \quad ; \quad \sum_{n=1}^{T} X_n \mathbb{1}_{\{X_n \geq 1\}} \quad ; \quad \sum_{n=1}^{T} X_n - \sum_{n=1}^{T} X_n \mathbb{1}_{\{X_n \geq 2\}}$$

Exercice 7. Soit A et B deux événements tels que $\mathbb{P}(A) = 5/12$, $\mathbb{P}(B) = 7/12$ et $\mathbb{P}(A \cap B) = 1/6$. Calculer $\mathbb{P}(A \cup B)$, $\mathbb{P}(A^c)$, $\mathbb{P}(A^c \cap B^c)$, $\mathbb{P}(A^c \cup B^c)$, $\mathbb{P}(A \cup B^c)$ et $\mathbb{P}(A \triangle B)$.

Exercice 8. Trois coureurs cyclistes A, B et C participent à un sprint à l'arrivée de Paris-Roubaix. On estime que A a deux fois plus de chances de gagner que B et que B a deux fois plus de chances de gagner que C. Quelles sont les probabilités de gagner de chaque coureur ?

Exercice 9. Problème des anniversaires
Des étudiants au nombre de n sont réunis dans un amphi : quelle est la probabilité qu'au moins deux étudiants aient leur anniversaire le même jour ? On suppose qu'aucun n'est né un 29 février et que $n \leq 365$.

Exercice 10. Une application de la formule de Poincaré
Au cours d'une soirée, chacune des n personnes invitées dépose son parapluie à l'entrée. A la fin de la soirée, l'ampoule étant cassée, elles reprennent chacune un parapluie au hasard. On se propose de calculer la probabilité de l'événement A :"aucun invité n'est reparti avec son parapluie".

1. On numérote les invités de 1 à n et on note B_i l'événement "le $i^{\text{ème}}$ invité est reparti avec son parapluie". Calculer $\mathbb{P}(B_i)$ puis $\mathbb{P}(B_i \cap B_j)$ où $i \neq j$.
2. Exprimer l'événement A en fonction des B_i. En déduire $\mathbb{P}(A)$. Vers quoi tend cette probabilité lorsque $n \to \infty$?

Exercice 11. Quelles sont les probabilités que, parmi les familles à n enfants, $n \geq 2$, une famille soit constituée d'enfants des deux sexes (événements A), puis de garçons et d'au plus une fille (événement B) ? Construire un modèle et calculer $\mathbb{P}(A \cap B)$; comparer cette quantité au produit $\mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$.