Chapitre 3 : Variables aléatoires discrètes

1 Loi de probabilité

1.1 Généralités

Définition 1. *Soit $(\Omega, \mathcal{A})$ un espace probabilisable et soit E un ensemble. On dit qu'une application X de Ω dans E est une* **variable aléatoire discrète** *si les deux conditions sont satisfaites :*

(i) L'ensemble $X(\Omega)$ des valeurs prises par X est dénombrable.

(ii) Pour tout $x \in E$, on a $X^{-1}(\{x\}) \in \mathcal{A}$.

La plupart du temps, on aura $E = \mathbb{N}$ ou $\mathbb{Z}$ et on munira E de la tribu $\mathcal{E} = \mathcal{P}(E)$.

Proposition 1. *Soit X une variable aléatoire définie sur l'espace probabilisable $(\Omega, \mathcal{A})$ à valeurs dans l'espace probabilisable $(E, \mathcal{E})$. L'application $A \mapsto \mathbb{P}[X^{-1}(A)]$ de $\mathcal{E}$ dans $[0,1]$ est une probabilité sur l'espace probabilisable $(E, \mathcal{E})$. Elle est notée $\mathbb{P}_X$. Cette probabilité est appelée* **loi (de probabilité)** *de la variable aléatoire X.*

La loi d'une variable aléatoire est une probabilité sur l'espace des valeurs prises par celle-ci. Si X est une variable aléatoire discrète à valeurs dans $(E, \mathcal{E})$, sa loi est déterminée entièrement par la fonction $x \mapsto \mathbb{P}(X = x)$ sur E, désignée comme la **fonction de masse** de la variable X.

1.2 Quelques lois usuelles

1.2.1 Loi uniforme

Comme nous l'avons vu précédemment, cette loi accorde la même probabilité à chaque élément d'un ensemble fini, que nous noterons $\{x_1, \cdots, x_n\}$. Si X est l'un des éléments de cet ensemble pris au hasard, c'est une variable aléatoire discrète à valeurs dans $E = \{x_1, \cdots, x_n\}$. On dit que X est une variable aléatoire de loi uniforme sur l'ensemble E et on écrit $X \sim \mathcal{U}(\{x_1, \cdots, x_n\})$. Sa fonction de masse est :

$$\mathbb{P}(X = x) = \frac{1}{n}$$

pour $x \in E = \{x_1, \cdots, x_n\}$. On vérifie que

$$\sum_{x \in E} \mathbb{P}(X = x) =$$

Exemples :

1. On effectue un tirage avec un dé à 6 faces équilibré. Soit X le résultat : il suit une loi uniforme sur $\{1, \cdots, 6\}$.
2. Une urne est remplie de 10 boules numérotées de 1 à 10. On tire une boule et on note X son numéro : X suit une loi uniforme sur $\{1, \cdots, 10\}$.

1.2.2 Loi de Bernoulli

Cette loi de probabilité sert à coder de manière numérique la réalisation ou non d'un événement. Soit A un événement aléatoire de probabilité $\mathbb{P}(A) = p \in]0,1[$. On définit la variable aléatoire

$$X = \begin{cases} 1 \text{ si } A \text{ se réalise,} \\ 0 \text{ si } A^c \text{ se réalise.} \end{cases}$$

On dit que X suit la loi de Bernoulli de paramètre p et on écrit : $X \sim \mathcal{B}(1, p)$. X est une variable aléatoire discrète à valeurs dans $E = \{0, 1\}$ et sa fonction de masse est :

$$\mathbb{P}(X = x) = p^x q^{1-x}$$

pour $x \in E = \{0,1\}$, avec $q = 1-p$. On vérifie que

$$\sum_{x \in E} \mathbb{P}(X = x) =$$

Exemples :

1. On lance une pièce de monnaie équilibrée. Soit A l'événement "face". Ici $X = 1$ si la pièce tombe sur face et 0 sinon. On a $p = \frac{1}{2}$.
2. On lance un dé équilibré. Soit A l'événement "résultat < 3". Ici $X = 1$ si le résultat est 1 ou 2 et $X = 0$ sinon. On a $p = \frac{1}{3}$.
3. Observation du sexe du prochain bébé qui naîtra dans une maternité : A ="fille". Ici $X = 1$ si c'est une fille et 0 sinon. Selon des statistiques de 2008 (http ://www.bartleby.com/151/fields/31.html), en France, $p = \frac{1}{2.05} \approx 0.4878$. Noter que p varie selon les pays (voir le site internet).

1.2.3 Loi binomiale

Cette loi de probabilité sert à modéliser le nombre de réalisations d'un événement. Soit A un événement aléatoire de probabilité $\mathbb{P}(A) = p \in]0,1[$, susceptible de se produire lors d'une expérience aléatoire. On se propose de répéter l'expérience n fois, de façon indépendante. À la $i^{\text{ème}}$ répétition, on observera si A s'est réalisé ou non et on y associera la variable aléatoire $Y_i \sim \mathcal{B}(1,p)$.
Soit X le nombre de réalisations de A au cours des n répétitions : $X = Y_1 + Y_2 \cdots + Y_n$ est la somme de n variables aléatoires de loi de Bernoulli indépendantes. C'est donc une variable aléatoire discrète à valeurs dans $E = \{0,1,\cdots,n\}$. On dit que X est une variable aléatoire de loi binomiale de paramètres n et p et on écrit $X \sim \mathcal{B}(n,p)$. Sa fonction de masse est :

$$\mathbb{P}(X = x) = C_n^x p^x q^{n-x}$$

pour $x \in E = \{0,1,\cdots,n\}$, où $C_n^x = \frac{n!}{x!(n-x)!}$ est le nombre de combinaisons de x éléments parmi n. On vérifie que

$$\sum_{x \in E} \mathbb{P}(X = x) =$$

Exemples :

1. On effectue des tirages avec remise dans une urne remplie de boules, dont 1/3 de blanches et 2/3 de rouges. Soit X le nombre de boules blanches tirées après 10 lancers : on a $X \sim \mathcal{B}(10, \frac{1}{3})$.
2. On lance une pièce de monnaie équilibrée 6 fois de suite. On s'intéresse à la probabilité d'obtenir, au cours de ces 6 lancers, 2 fois l'événement $A =$ "face". Si on note X le nombre de "face" sur 6 lancers, on a $X \sim \mathcal{B}(6, \frac{1}{2})$ de sorte que :
3. On estime qu'en France à l'instant t, la probabilité qu'un individu soit un fumeur est de 0.2. Un bus contient 6 personnes. Quelle est la probabilité que 4 ou plus de ces passagers soient fumeurs ? On suppose leur indépendance. Soit X le nombre de fumeurs parmi les 6 personnes : on a $X \sim \mathcal{B}(6, 0.2)$, $E = \{0,1,\cdots,6\}$ et

1.2.4 Loi géométrique

Cette loi de probabilité sert à modéliser le nombre d'essais nécessaires à la réalisation d'un événement. Soit A un événement aléatoire de probabilité $\mathbb{P}(A) = p \in]0,1[$, susceptible de se produire lors d'une expérience aléatoire. On se propose de répéter l'expérience, de façon indépendante, tant que l'événement A n'est pas réalisé.
Soit X le nombre de répétitions de l'expérience. C'est une variable aléatoire discrète à valeurs dans $E = \mathbb{N}^*$. On dit que X est une variable aléatoire de loi géométrique de paramètre p et on écrit $X \sim \mathcal{G}(p)$. Sa fonction de masse est :

$$\mathbb{P}(X = x) = pq^{x-1}$$

pour $x \in E = \mathbb{N}^*$. On vérifie que

$$\sum_{x \in E} \mathbb{P}(X = x) =$$

Exemples :

1. On lance une pièce de monnaie équilibrée jusqu'à la réalisation de l'événement $A =$ "face". Si on note X le nombre de lancers nécessaires, on a $X \sim \mathcal{G}(\frac{1}{2})$ de sorte que :

$$\mathbb{P}(X = x) = \frac{1}{2^x}.$$

2. On lance un dé à 6 faces jusqu'à l'obtention d'un 6. Si on note X le nombre de lancers nécessaires, on a $X \sim \mathcal{G}(\frac{1}{6})$ de sorte que :

$$\mathbb{P}(X = x) = \frac{1}{6} \times \frac{5^{x-1}}{6^{x-1}}.$$

1.2.5 Loi hypergéométrique

Cette loi de probabilité sert à modéliser le résultat d'un tirage **sans remise**. Soit U un ensemble de cardinal r partitionné en deux sous-ensembles U_1 et U_2, de cardinaux respectifs r_1 et $r_2 = r - r_1$. On se propose de choisir "au hasard" n éléments de U $(n \leq r)$ et on note X le nombre d'éléments de U_1 parmi ces n. C'est une variable aléatoire discrète à valeurs dans $E = \{\max(0, n-r_2), \cdots, \min(n, r_1)\}$.
On dit que X est une variable aléatoire de loi hypergéométrique de paramètres n, r et r_1 et on écrit $X \sim \mathcal{H}(n, r, r_1)$. Sa fonction de masse est :

$$\mathbb{P}(X = x) = \frac{C_{r_1}^x C_{r_2}^{n-x}}{C_r^n}$$

pour $x \in E = \{\max(0, n - r_2), \cdots, \min(n, r_1)\}$. On vérifie que

$$\sum_{x \in E} \mathbb{P}(X = x) =$$

Exemples :

1. Un lac contient r poissons, dont r_1 sont d'une espèce intéressante. On pêche n poissons, en supposant que toutes les espèces se laissent aussi facilement attraper, et on note X le nombre de poissons de l'espèce intéressante parmi les poissons attrapés : X suit une loi hypergéométrique.
2. Ce modèle hypergéométrique est à la base de la théorie des sondages.

1.2.6 Loi de Poisson

Cette loi de probabilité décrit le comportement du nombre d'évènements se produisant dans un laps de temps fixé, si ces évènements se produisent avec une fréquence moyenne connue et indépendamment du temps écoulé depuis l'évènement précédent. Soit X ce nombre d'occurrences. C'est une variable aléatoire discrète à valeurs dans $E = \mathbb{N}$. On dit que X est une variable aléatoire de loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$ et on écrit $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$. Sa fonction de masse est :

$$\mathbb{P}(X = x) = \exp(-\lambda)\frac{\lambda^x}{x!}$$

pour $x \in E = \mathbb{N}$. On vérifie que

$$\sum_{x \in E} \mathbb{P}(X = x) =$$

Exemples : Actuellement, on utilise beaucoup cette loi dans les télécommunications (pour compter le nombre de communications dans un intervalle de temps donné), le contrôle de qualité statistique (nombre de défauts), la description de certains phénomènes liés à la désintégration radioactive, la biologie (mutations), la météorologie, la finance pour modéliser la probabilité de défaut d'un crédit, le Yield Management (pour estimer la demande de passagers).

2 Moments

Les moments d'une variable aléatoire sont des paramètres numériques qui donnent des renseignements sur la loi de cette variable aléatoire (sans toutefois, en général, la déterminer complètement). Les plus couramment utilisés sont la moyenne, ou espérance mathématique, et la variance.

2.1 Moyenne ou espérance mathématique

Définition 2. *Soit X une variable aléatoire réelle discrète à valeurs dans E. Si la somme $\sum_{x \in E} |x|\, \mathbb{P}(X = x)$ est finie, on dit que la variable aléatoire X possède une* ***moyenne*** *ou* ***espérance mathématique***

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{x \in E} x\, \mathbb{P}(X = x).$$

En langage courant, $\mathbb{E}(X)$ n'est autre que la **moyenne pondérée** des valeurs x prises par la variable aléatoire X, pondérées par la probabilité que X vaille x.

2.1.1 Premières propriétés de l'espérance

Proposition 2. *On peut montrer les propriétés suivantes :*

(i) Soit un réel a. Si la variable aléatoire X est telle que $\mathbb{P}(X = a) = 1$, elle admet une moyenne égale à a et on écrit

$$\mathbb{E}(a) = a.$$

(ii) Toute variable aléatoire discrète bornée admet une moyenne.

(iii) Si $X \geq 0$ alors $\mathbb{E}(X) \geq 0$. Si $X \geq 0$ et $\mathbb{E}(X) = 0$ alors $X = 0$ avec probabilité 1.

(iv) Si X et Y possèdent une moyenne et vérifient $X \leq Y$ alors $\mathbb{E}(X) \leq \mathbb{E}(Y)$.

(v) Si X possède une moyenne, on a :

$$|\mathbb{E}(X)| \leq \mathbb{E}|X|.$$

Exemples :

1. Si $X \sim \mathcal{U}(\{x_1, \cdots, x_n\})$, sa moyenne est la moyenne arithmétique des x_i :

$$\mathbb{E}(X) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i.$$

2. Si $X \sim \mathcal{B}(1, p)$, sa moyenne est

$$\mathbb{E}(X) = 1 \times p + 0 \times q = p.$$

2.1.2 Espérance d'une fonction de variable aléatoire

Théorème 1. *(Théorème de transfert)*
Soit X une variable aléatoire discrète à valeurs dans E. Soit f une application de E dans $\mathbb{R}$. L'application composée $Y = f \circ X = f(X)$ est une variable aléatoire réelle discrète. Pour qu'elle admette une moyenne, il faut et il suffit que la somme

$$\sum_{x \in E} |f(x)| \, \mathbb{P}(X = x)$$

soit finie. Dans ce cas, on a :

$$\mathbb{E}\big(f(X)\big) = \sum_{x \in E} f(x) \, \mathbb{P}(X = x).$$

Proposition 3. *Soit X et Y deux variables aléatoires réelles discrètes et a et b deux réels. On a :*

$$\mathbb{E}(aX + bY) = a \, \mathbb{E}(X) + b \, \mathbb{E}(Y).$$

2.1.3 Moyennes des lois discrètes classiques

Loi binomiale Soit X une variable aléatoire suivant une loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$. On rappelle que X peut s'écrire comme la somme de n variables aléatoires indépendentes $Y_1, \cdots, Y_n$ suivant la loi de Bernoulli $\mathcal{B}(1, p)$:

$$X = Y_1 + \cdots Y_n \Rightarrow$$

Loi géométrique Soit X une variable aléatoire suivant une loi géométrique $\mathcal{G}(p)$. On a :

$$\mathbb{E}(X) =$$

Loi de Poisson Soit X une variable aléatoire suivant une loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$. On a :

$$\mathbb{E}(X) =$$

On remarque que, si l'on sait qu'une variable aléatoire suit une loi géométrique ou une loi de Poisson, pour identifier entièrement sa loi, il suffit de connaître sa moyenne, ce qui n'est pas le cas pour la loi binomiale.

2.2 Moments d'ordre deux et variance

2.2.1 Généralités

Définition 3. *Soit X une variable aléatoire réelle discrète et p un entier supérieur ou égal à 1. Si $\mathbb{E}(|X|^p) < +\infty$, on dit que X admet un* ***moment d'ordre*** *p, qui n'est autre que le nombre réel $\mathbb{E}(X^p)$.*

Proposition 4. *(Inégalité de Cauchy-Schwarz).*
Soit X et Y deux variables aléatoires réelles discrètes admettant un moment d'ordre deux. On a :

$$[\mathbb{E}(XY)]^2 \leq \mathbb{E}(X^2)\mathbb{E}(Y^2).$$

Définition 4. *(i) Si X admet un moment d'ordre 1, la variable aléatoire $\dot{X} = X - \mathbb{E}(X)$ est appelée* ***variable aléatoire centrée*** *associée à X. On a $\mathbb{E}(\dot{X}) = 0$.*

(ii) Si X admet un moment d'ordre 2, X admet une moyenne et le réel $\mathbb{E}\big[\big(X - \mathbb{E}(X)\big)^2\big]$ est appelé ***variance*** *de X et noté $\mathbb{V}(X)$. Sa racine carrée est appelée* ***écart-type*** *de X et notée σ_X. On a donc $\mathbb{V}(X) = \sigma_X^2$.*

(iii) Si X admet un moment d'ordre 2 et que $\sigma_X \neq 0$, la variable aléatoire $\tilde{X} = \frac{X-\mathbb{E}(X)}{\sigma_X}$ est appelée ***variable aléatoire centrée réduite*** *associée à X. On a $\mathbb{E}(\tilde{X}) = 0$ et $\mathbb{V}(\tilde{X}) = 1$.*

D'après le théorème de transfert, la variance de X s'obtient de la manière suivante :

$$\mathbb{V}(X) = \sum_{x \in E} [x - \mathbb{E}(X)]^2 \, \mathbb{P}(X = x).$$

Proposition 5. *Si X admet un moment d'ordre deux, on a :*

(i)

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - [\mathbb{E}(X)]^2.$$

(ii) Pour tous réels a et b, on a :

$$\mathbb{V}(aX + b) = a^2 \mathbb{V}(X).$$

2.2.2 Covariance de deux variables aléatoires

Définition 5. *Si X et Y admettent un moment d'ordre 2, il résulte de l'inégalité de Cauchy-Schwarz que la variable aléatoire $\big(X - \mathbb{E}(X)\big)\big(Y - \mathbb{E}(Y)\big)$ admet une moyenne, que nous appellons* ***covariance*** *de X et Y :*

$$cov(X, Y) = \mathbb{E}\big[\big(X - \mathbb{E}(X)\big)\big(Y - \mathbb{E}(Y)\big)\big].$$

La proposition suivante permet en général un calcul plus simple de la covariance de deux variables aléatoires et permet également de calculer la variance d'une somme de variables aléatoires.

Proposition 6. *Si X et Y admettent un moment d'ordre 2, on a :*

(i)

$$cov(X, Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\,\mathbb{E}(Y).$$

(ii)

$$\mathbb{V}(X + Y) = \mathbb{V}(X) + \mathbb{V}(Y) + 2\,cov(X, Y).$$

Proposition 7. *Si X et Y admettent un moment d'ordre 1 et sont* ***indépendantes****, on a :*

$$\mathbb{E}(X\,Y) = \mathbb{E}(X)\,\mathbb{E}(Y).$$

Ainsi, si X et Y sont **indépendantes**, on a :

$$cov(X, Y) = 0 \text{ et } \mathbb{V}(X + Y) = \mathbb{V}(X) + \mathbb{V}(Y).$$

Par extension, la variance d'une somme de variables aléatoires indépendantes est la somme de leurs variances. Attention ! L'égalité $cov(X, Y) = 0$ **n'entraîne pas** l'indépendance entre X et Y (cf TD3).

2.2.3 Variance des lois discrètes classiques

Loi de Bernoulli Soit X une variable aléatoire suivant une loi de Bernoulli $\mathcal{B}(1, p)$. On a :

$$\mathbb{V}(X) =$$

Loi binomiale Soit X une variable aléatoire suivant une loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$. On rappelle que X peut s'écrire comme la somme de n variables aléatoires indépendentes $Y_1, \cdots, Y_n$ suivant la loi de Bernoulli $\mathcal{B}(1, p)$ donc

$$\mathbb{V}(X) =$$

Loi géométrique Soit X une variable aléatoire suivant une loi géométrique $\mathcal{G}(p)$. Calculons d'abord :

$$\mathbb{E}\big(X(X-1)\big) =$$

Loi de Poisson Soit X une variable aléatoire suivant une loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$. Calculons d'abord :

$$\mathbb{E}\big(X(X-1)\big) =$$

2.3 Fonctions génératrices

2.3.1 Généralités

Définition 6. *Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$. La* ***fonction génératrice*** *de X est la fonction G_X qui, à tout $s \in \mathbb{R}$, associe*

$$G_X(s) = \mathbb{E}(s^X)$$

lorsque cette quantité existe.

Proposition 8. *Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$, de fonction génératrice G_X et de loi déterminée par :*

$$\mathbb{P}(X = n) = p_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

(i) Le domaine de définition de G_X contient l'intervalle $[-1, 1]$. On a :

$$\forall s \in [-1,1], \quad |G_X(s)| \leq 1 \text{ et } G_X(1) = 1.$$

(ii) Pour tout $s \in [-1, 1]$, on a :

$$G_X(s) = \sum_{n=0}^{+\infty} p_n s^n.$$

(iii) La fonction G_X est continue sur $[-1, 1]$, et C^∞ sur $]-1, 1[$.

(iv) La fonction génératrice G_X caractérise la loi de X puisque, pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a :

$$\mathbb{P}(X = k) = \frac{G_X^{(k)}(0)}{k!}.$$

2.3.2 Fonctions génératrices des lois discrètes classiques

Loi binomiale Soit X une variable aléatoire suivant une loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$. On a, $\forall s \in [-1, 1]$:

$$G_X(s) =$$

Loi géométrique Soit X une variable aléatoire suivant une loi géométrique $\mathcal{G}(p)$. On a, $\forall s \in [-1, 1]$:

$$G_X(s) =$$

Loi de Poisson Soit X une variable aléatoire suivant une loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$. On a, $\forall s \in [-1,1]$:

$$G_X(s) =$$

2.3.3 Fonctions génératrices et moments

La fonction génératrice d'une variable aléatoire déterminant sa loi, il est naturel qu'elle donne ses moments lorsque ceux-ci existent. Nous noterons, pour $r \in \mathbb{N}^*$, $G_X^{(r)}(1^-)$ la $r^{\text{ième}}$ dérivée à gauche de G_X en 1 lorsqu'elle existe.

Proposition 9. *Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$. Pour que X admette un moment d'ordre $r \in \mathbb{N}^*$, il faut et il suffit que sa fonction génératrice G_X soit r fois dérivable à gauche en 1 et dans ce cas, on a*

$$G_X^{(r)}(1^-) = \sum_{k=r}^{+\infty} k(k-1)\cdots(k-r+1)p_k = \mathbb{E}[X(X-1)\cdots(X-r+1)].$$