Chapitre 2 : Indépendance et conditionnement

1 Indépendence d'événements et de variables aléatoires

1.1 Evénements indépendants

Définition 1. *Soit* $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ *un espace probabilisé.*

(i) Deux événements $A \in \mathcal{A}$ *et* $B \in \mathcal{A}$ *sont* ***indépendants*** *si :*

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \quad \mathbb{P}(B).$$

(ii) Soit $(A_i)_{i \in I}$ *une famille quelconque d'événements. Ces événements sont dits* ***indépendants*** *(dans leur ensemble) si, pour toute partie non vide* J *de* I*, on a :*

$$\mathbb{P}\Big(\bigcap_{j \in J} A_j\Big) = \prod_{j \in J} \mathbb{P}(A_j).$$

Remarques :

1. L'indépendance des événements $A_1, A_2, \cdots, A_n$ représente $2^n - n - 1$ conditions (nombre de parties de $I = \{1, \cdots, n\}$ de cardinal ≥ 2).
2. Si n événements sont indépendants dans leur ensemble, ils sont indépendants deux à deux. Mais la réciproque n'est pas nécessairement vraie.
3. On peut avoir :

$$\mathbb{P}(A \cap B \cap C) = \mathbb{P}(A) \quad \mathbb{P}(B) \quad \mathbb{P}(C)$$

sans que les événements soient indépendants deux à deux.

Exemples :

1. On considère l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, où $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}$ est un ensemble à quatre éléments muni de la tribu de ses parties et où $\mathbb{P}$ est la probabilité uniforme sur Ω. On considère les événements

$$A = \{\omega_1, \omega_2\}, \quad B = \{\omega_1, \omega_3\}, \quad C = \{\omega_1, \omega_4\}.$$

On a :

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A \cap C) = \mathbb{P}(B \cap C) = \tfrac{1}{4}$$

et

$$\mathbb{P}(A) \quad \mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A) \quad \mathbb{P}(C) = \mathbb{P}(B) \quad \mathbb{P}(C) = \tfrac{1}{4}.$$

Les événements A, B et C sont donc indépendants deux à deux, mais

$$\mathbb{P}(A \cap B \cap C) = \tfrac{1}{4} \text{ et } \mathbb{P}(A) \quad \mathbb{P}(B) \quad \mathbb{P}(C) = \tfrac{1}{8}$$

donc les événements A, B et C ne sont pas indépendants dans leur ensemble.

2. On considère l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$, où $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2$, avec $\Omega_1 = \Omega_2 = \{1, 2, \cdots, 6\}$. L'ensemble Ω est muni de la tribu de ses parties et $\mathbb{P}$ est la probabilité uniforme sur Ω. On considère les trois événements :

$$A = \Omega_1 \times \{1, 2, 5\}, \quad B = \Omega_1 \times \{4, 5, 6\}, \quad C = \{(i, j) \in \Omega \,|\, i + j = 9\}.$$

En fait, on a $C = \{(3,6),(4,5),(5,4),(6,3)\}$ donc $\mathbb{P}(C) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$.
On a également :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(A \cap B) &= \tfrac{6}{36} \neq \tfrac{1}{2}\tfrac{1}{2} = \mathbb{P}(A)\,\mathbb{P}(B),\\
\mathbb{P}(A \cap C) &= \tfrac{1}{36} \neq \tfrac{1}{2}\tfrac{1}{9} = \mathbb{P}(A)\,\mathbb{P}(C),\\
\mathbb{P}(B \cap C) &= \tfrac{3}{36} \neq \tfrac{1}{2}\tfrac{1}{9} = \mathbb{P}(B)\,\mathbb{P}(C).
\end{aligned}$$

Toutefois, on a $\mathbb{P}(A \cap B \cap C) = \frac{1}{36} = \mathbb{P}(A)\,\mathbb{P}(B)\,\mathbb{P}(C)$.
Les événements A, B et C sont donc trois à trois indépendants mais ne sont pas indépendants deux à deux, donc pas indépendants dans leur ensemble.

1.2 Evénements indépendants et passage au complémentaire

Dire que A et B sont indépendants équivaut à dire que la réalisation ou la non-réalisation de B n'influe pas sur la probabilité de voir A se réaliser. Il est naturel de penser qu'on peut remplacer dans cette formulation B par l'événement contraire B^c.

Proposition 1. *Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. Si A et B sont deux événements indépendants, les événements A et B^c d'une part, A^c et B d'autre part, A^c et B^c enfin, sont indépendants.*

Cette proposition se généralise à toute famille $(A_i)_{i\in I}$ d'événements indépendants. Supposons que l'ensemble I soit partitionné en deux parties I_1 et I_2. Les événements $(B_i)_{i\in I}$ définis par :

$$B_i = \begin{cases} A_i \text{ si } i \in I_1, \\ A_i^c \text{ si } i \in I_2, \end{cases}$$

forment une famille d'événements indépendants.

1.3 Variables aléatoires indépendantes

1.3.1 Généralités

Définition 2. *Toutes les variables aléatoires considérées sont définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.*

*(i) Soit deux variables aléatoires X_1 et X_2 à valeurs respectivement dans des espaces probabilisables $(E_1, \mathcal{E}_1)$ et $(E_2, \mathcal{E}_2)$. Les variables aléatoires X_1 et X_2 sont **indépendantes** si, pour tout $A_1 \in \mathcal{E}_1$ et pour tout $A_2 \in \mathcal{E}_1$, les événements $(X_1 \in A_1)$ et $(X_2 \in A_2)$ sont indépendants.*

*(ii) Cette notion se généralise à une famille quelconque de variables aléatoires. Soit $(X_i)_{i\in I}$ une famille quelconque de variables aléatoires à valeurs dans des espaces probabilisables respectifs $(E_i, \mathcal{E}_i)$. Les variables aléatoires X_i sont **indépendantes** si pour toute famille $(A_i)_{i\in I}$ d'ensembles telle que, pour tout $i \in I$, $A_i \in \mathcal{E}_i$, les événements $(X_i \in A_i)$, $i \in I$, sont indépendants.*

Proposition 2. *Soit I un ensemble fini non vide. Soit $(X_i)_{i\in I}$ une famille de variables aléatoires à valeurs respectivement dans des espaces probabilisables $(E_i, \mathcal{E}_i)$. Les variables aléatoires X_i sont indépendantes si et seulement si pour toute famille $(A_i)_{i\in I}$ d'ensembles telle que, pour tout $i \in I$, $A_i \in \mathcal{E}_i$, on a la relation :*

$$\mathbb{P}\Big[\bigcap_{i\in I}(X_i \in A_i)\Big] = \prod_{i\in I} \mathbb{P}(X_i \in A_i).$$

1.3.2 Fonctions de variables aléatoires

Soit X une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, à valeurs dans un espace probabilisable $(E, \mathcal{E})$. Soit f une variable aléatoire définie sur $(E, \mathcal{E})$, à valeurs dans un espace $(F, \mathcal{F})$. Alors l'application composée $f \circ X$ est une variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, à valeurs dans $(F, \mathcal{F})$: en effet, pour tout $B \in \mathcal{F}$, l'ensemble

$$(f \circ X)^{-1}(B) = X^{-1}\big(f^{-1}(B)\big)$$

appartient à $\mathcal{A}$. Plutôt que $f \circ X$, cette variable aléatoire est classiquement notée $f(X)$. On parle à son propos de **fonction de la variable aléatoire** X.

Le résultat ci-dessous affirme que "des fonctions de variables aléatoires indépendantes sont indépendantes". Il est très utile car il permet souvent de démontrer sans calculs que des variables aléatoires sont indépendantes.

Proposition 3. *Soit $(X_i)_{i\in I}$ une famille quelconque de variables aléatoires définies sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, à valeurs respectivement dans des espaces probabilisables $(E_i, \mathcal{E}_i)$. On suppose que ces variables aléatoires sont indépendantes. Soit, pour tout $i \in I$, une variable aléatoire f_i définie sur l'espace probabilisable $(E_i, \mathcal{E}_i)$, à valeurs dans un espace probabilisable $(F_i, \mathcal{F}_i)$. Alors les variables aléatoires $f_i(X_i)$ sont indépendantes.*

Exemple : On peut affirmer sans calcul que si X_1 et X_2 sont deux variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\mathbb{R}$, les variables aléatoires X_1^2 et $\exp(X_2)$ sont indépendantes.

On peut également considérer des fonctions de plusieurs variables aléatoires. Soit $X_1, \cdots, X_n$ des variables aléatoires définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, à valeurs respectivement dans $\big((E_1, \mathcal{E}_1), \cdots, (E_n, \mathcal{E}_n)\big)$. Soit F un ensemble quelconque et soit $f : E_1 \times \cdots \times E_n \mapsto F$ une application quelconque. Alors la composée de l'application $\omega \mapsto \big(X_1(\omega), \cdots, X_n(\omega)\big)$ de Ω dans $E_1 \times \cdots \times E_n$ et de l'application f se note $f(X_1, \cdots, X_n)$, et c'est une variable aléatoire à valeurs dans F.

Proposition 4. *Soit $f_1 : E_1 \times \cdots \times E_k \mapsto F_1$ et $f_2 : E_{k+1} \times \cdots \times E_n \mapsto F_2$ des applications quelconques. Si les variables aléatoires $X_1, \cdots, X_n$ sont indépendantes, alors les variables aléatoires $f_1(X_1, \cdots, X_k)$ et $f_2(X_{k+1}, \cdots, X_n)$ sont indépendantes.*

Exemple : On peut affirmer sans calcul que si $X_1, \cdots, X_4$ sont quatre variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\mathbb{R}$, les variables aléatoires $X_1^2 + X_2$ et $\exp(X_3 + X_4)$ sont indépendantes.

2 Probabilités conditionnelles

Dans la suite, $\mathbb{P}$ est une probabilité quelconque sur l'espace probabilisable $(\Omega, \mathcal{A})$.

2.1 Définitions. Formule des probabilités totales

Définition 3. *Soit $B \in \mathcal{A}$ un événement tel que $\mathbb{P}(B) > 0$. Soit $A \in \mathcal{A}$ un événement ; on appelle* ***probabilité de A conditionnée par B (ou sachant B)*** *le nombre réel, noté $\mathbb{P}(A|B)$ ou $\mathbb{P}^B(A)$, défini par :*

$$\mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}^B(A) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}.$$

Proposition 5. *Soit $B \in \mathcal{A}$ un événement tel que $\mathbb{P}(B) > 0$. L'application $\mathbb{P}^B$ de $\mathcal{A}$ dans $\mathbb{R}^+$ qui à tout $A \in \mathcal{A}$ fait correspondre $\mathbb{P}^B(A)$ est une probabilité sur l'espace probabilisable $(\Omega, \mathcal{A})$. Elle est appelée* ***probabilité conditionnée à B ou probabilité conditionnelle sachant B****.*

Remarques :

1. Cette proposition est très importante puisqu'elle dit que toutes les propriétés établies jusqu'à maintenant pour une probabilité quelconque sont vraies pour la probabilité conditionnelle $\mathbb{P}^B$.
2. Pour que les événements A et B soient **indépendants**, il faut et il suffit que : $\mathbb{P}^B(A) = \mathbb{P}(A)$.

L'exemple ci-dessous montre comment une probabilité conditionnelle rend compte de l'information apportée par la réalisation d'un événement sur la réalisation d'un autre événement.

Exemple : On jette deux fois un dé à 6 faces. Soit A l'événement "on obtient un 6 au premier jet", et soit $B_k, 2 \leq k \leq 12$, les événements "la somme des deux résultats est k". On modélise les deux lancers de dé par l'espace probabilisé $\big(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P}\big)$, où $\Omega = \{1, 2, \cdots, 6\}^2$ et $\mathbb{P}$ est la probabilité uniforme. On a :

$$A = \{6\} \times \{1, 2, \cdots, 6\}$$

et

$$B_k = \{(\omega_1, \omega_2) \in \Omega | \omega_1 + \omega_2 = k\}.$$

En particulier, on a $B_{12} \subset A$ et $B_{11} = \{(5,6),(6,5)\}$ donc

$$\mathbb{P}(A) = \tfrac{1}{6}, \quad \mathbb{P}(A|B_{11}) = \tfrac{1}{2}, \quad \mathbb{P}(A|B_{12}) = 1.$$

La proposition suivante résulte immédiatement de la définition.

Proposition 6. *Si $\mathbb{P}(B) > 0$, on a :*

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A|B)\,\mathbb{P}(B).$$

Elle se généralise de la façon suivante.

Proposition 7. *(Probabilités conditionnelles en cascade)*
Soit $(A_i)_{1\leq i\leq n}$ une suite finie d'événements tels que $\mathbb{P}\Big(\bigcap_{1\leq i\leq n-1} A_i\Big) > 0$. On a :

$$\mathbb{P}\Big(\bigcap_{1\leq i\leq n} A_i\Big) = \mathbb{P}(A_1)\,\mathbb{P}(A_2|A_1)\,\mathbb{P}(A_3|A_1\cap A_2)\cdots\mathbb{P}(A_n|A_1\cap\cdots\cap A_{n-1}).$$

Exemple : On tire successivement 4 cartes d'un jeu de 52 cartes. Quelle est la probabilité de tirer les 4 as ?
Solution. Notons $A_i, 1 \leq i \leq 4$, l'événement "la $i^{\text{ème}}$ carte tirée est un as". On demande de calculer $\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4)$. Les probabilités immédiatement accessibles, en dehors de $\mathbb{P}(A_1)$, sont les probabilités conditionnelles

$$\mathbb{P}(A_2|A_1) = \tfrac{3}{51}, \quad \mathbb{P}(A_3|A_1\cap A_2) = \tfrac{2}{50}, \quad \mathbb{P}(A_4|A_1\cap A_2\cap A_3) = \tfrac{1}{49}.$$

On a donc

$$\mathbb{P}(A_1\cap A_2\cap A_3\cap A_4) = \mathbb{P}(A_1)\,\mathbb{P}(A_2|A_1)\,\mathbb{P}(A_3|A_1\cap A_2)\,\mathbb{P}(A_4|A_1\cap A_2\cap A_3) = \tfrac{4\times3\times2\times1}{52\times51\times50\times49} \approx 0,000004.$$

Nous ne sommes pas préoccupés dans cet exemple de la construction d'un espace Ω.

Définition 4. *Soit $(A_i)_{i\in I}$ une famille **dénombrable** d'événements disjoints deux à deux telle que*

$$\mathbb{P}\Big(\bigcup_{i\in I} A_i\Big) = 1.$$

*Une telle famille est appelée **système complet d'événements**.*

Soit N le complémentaire de $\bigcup_{i\in I} A_i$ dans Ω. On a $\mathbb{P}(N) = 0$. Les événements $(A_i)_{i\in I}$ et N forment une partition de Ω. On traduit cette situation en termes probabilistes : avec probabilité 1, l'un des événements A_i et un seul se réalise.

Exemple : On lance une pièce de monnaie jusqu'à ce qu'on obtienne un "pile". Soit A_i l'événement "pile apparaît pour la première fois au $i^{\text{ème}}$ lancer". Les A_i sont évidemment deux à deux disjoints. D'autre part, il est possible qu'aucun des A_i ne se réalise mais la probabilité de cet événement est nulle. La famille des événements $(A_i)_{i=1,2,\cdots}$ est donc un système complet.

Théorème 1. *(Formule des probabilités totales)*
Soit $(A_i)_{i\in I}$ un système complet d'événements tel que $\mathbb{P}(A_i) > 0$ pour tout $i \in I$. On a alors, pour tout événement $A \in \mathcal{A}$:

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{i\in I} \mathbb{P}(A|A_i)\,\mathbb{P}(A_i).$$

Un cas particulier de système complet est le système (B, B^c) où B est un événement tel que $0 < \mathbb{P}(B) < 1$. La formule des probabilités totales devient dans ce cas

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A|B)\,\mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(A|B^c)\,\mathbb{P}(B^c).$$

Exemple : Une urne U_1 (respectivement U_2) contient b_1 (respectivement b_2) boules blanches et n_1 (respectivement n_2) boules noires. On choisit au hasard une urne et on tire ensuite une boule dans cette urne. On cherche la probabilité de tirer une boule noire.
Solution. Notons N, U_1 et U_2 les événements "on tire une boule noire", "le tirage a lieu dans l'urne U_1" et "le tirage a lieu dans l'urne U_2". On a :

$$\mathbb{P}(U_i) = \tfrac{1}{2} \text{ et } \mathbb{P}(N|U_i) = \tfrac{n_i}{n_i+b_i}.$$

Les événements U_1 et U_2 forment un système complet donc

$$\mathbb{P}(N) = \mathbb{P}(U_1)\,\mathbb{P}(N|U_1) + \mathbb{P}(U_2)\,\mathbb{P}(N|U_2) = \frac{1}{2}\Big(\frac{n_1}{n_1+b_1} + \frac{n_2}{n_2+b_2}\Big).$$

2.2 Formule de Bayes

Proposition 8. *Soit deux événements $A_1, A_2 \in \mathcal{A}$ de probabilités non nulles. Alors :*

$$\mathbb{P}(A_2|A_1) = \mathbb{P}(A_1|A_2)\,\frac{\mathbb{P}(A_2)}{\mathbb{P}(A_1)}.$$

Théorème 2. *(Formule de Bayes)*
Soit $(A_i)_{i\in I}$ un système complet d'événements tel que $\mathbb{P}(A_i) > 0$ pour tout $i \in I$. On a alors, pour tout événement $A \in \mathcal{A}$ de probabilité non nulle et pour tout $i \in I$:

$$\mathbb{P}(A_i|A) = \frac{\mathbb{P}(A|A_i)\,\mathbb{P}(A_i)}{\sum_{j\in I}\mathbb{P}(A|A_j)\,\mathbb{P}(A_j)}.$$

Exemple : On reprend l'exemple des deux urnes. On cherche maintenant la probabilité **a posteriori** d'avoir tiré dans l'urne U_i, sachant qu'une boule noire a été tirée.
Solution. On applique le théorème de Bayes avec le système complet formé des événements U_1 et U_2. Il vient, pour $i = 1, 2$,

$$\mathbb{P}(U_i|N) = \frac{\mathbb{P}(N|U_i)\,\mathbb{P}(U_i)}{\mathbb{P}(N|U_1)\,\mathbb{P}(U_1) + \mathbb{P}(N|U_2)\,\mathbb{P}(U_2)} = \frac{\frac{n_i}{n_i+b_i}}{\frac{n_1}{n_1+b_1} + \frac{n_2}{n_2+b_2}}.$$

On remarque qu'on a bien $\mathbb{P}(U_1|N) + \mathbb{P}(U_2|N) = \mathbb{P}(U_1 \cup U_2|N) = \mathbb{P}(\Omega|N) = 1$.