

Chapitre 1 : Espaces probabilisés

Introduction

La théorie des Probabilités est la branche des mathématiques qui étudie les phénomènes aléatoires, c'est-à-dire soumis au hasard. Notons que le mot *aléatoire* vient du latin *alea*, le dé, la chance, et que *hasard* vient de l'arabe *al-zahr*, le dé.

Issue de l'étude des jeux de hasard, qui lui ont fourni ses notions de base (probabilité d'un événement, espérance de gain), la théorie des Probabilités est aujourd'hui une branche des mathématiques au même titre que la Géométrie, l'Algèbre et l'Analyse. Elle entretient naturellement des liens étroits avec les applications : en Sciences physiques, en Biologie (où le hasard est omniprésent, comme source de la diversité biologique des individus), dans les Sciences économiques et sociales et en technologie (contrôler une situation, c'est maîtriser le hasard!).

1 Expérience aléatoire

Pour parler du hasard en termes mathématiques, il est nécessaire d'isoler une situation, du type de celles qui se produisent à intervalles réguliers dans les jeux de hasard, lorsqu'on lance les dés ou que l'on distribue les cartes. A une telle situation isolée, que l'on peut répéter à l'envi, on donne le nom d'expérience aléatoire.

De façon générale, une **expérience aléatoire** est une expérience renouvelable, au moins en théorie, et qui, renouvelée dans des conditions identiques, ne donne pas à chaque essai le même résultat. Voici quelques exemples :

- lancer deux dés ;
- distribuer les cartes au tarot, c'est-à-dire répartir le paquet de 78 cartes entre les 3, 4 ou 5 joueurs ;
- observer la formation d'un caractère génétique d'un individu à partir des caractères correspondants de ses parents ;
- observer la désintégration d'un noyau atomique radioactif ;
- attendre le tram à la station Universités, à partir de 18h.

Attention! Quand nous parlons de conditions identiques, nous parlons du point de vue de l'observateur. Le hasard apparaît ainsi souvent comme un nom que nous donnons à notre ignorance de certaines conditions de l'expérience. Il y a donc notamment du hasard lorsque le nombre de facteurs est si grand qu'il est impossible de tous les contrôler. Mais on parle également de hasard lorsque toute imprécision sur les conditions initiales se trouve tellement amplifiée durant l'expérience qu'il devient impossible de faire une prévision correcte : par exemple, les lois de la mécanique des solides devraient nous permettre d'anticiper le résultat d'un lancer de dé mais les incertitudes sur les conditions initiales (manière de lancer) nous interdisent toute prévision.

Voici une liste de phénomènes aléatoires qui font l'objet de recherches scientifiques ou technologiques :

- l'apparition d'objets défectueux dans une chaîne de fabrication (fiabilité) ;
- les effets d'un engrais sur la croissance des céréales (agronomie) ;
- les appels reçus à un standard téléphonique (files d'attente) ;
- le mouvement d'une particule dans un liquide, observé par Robert Brown en 1827, et appelé depuis mouvement brownien (mathématiques financières) ;
- les incertitudes sur la trajectoire d'un véhicule spatial (contrôle stochastique).

Pour étudier un phénomène dépendant du hasard, le praticien essaiera d'isoler une expérience aléatoire et il en construira un modèle probabiliste lui permettant de faire certaines prévisions ; disons pour être concret qu'il pourra calculer la probabilité de certains résultats ou de certains événements. La première étape de la modélisation mathématique d'une expérience aléatoire consiste à spécifier **l'ensemble des résultats possibles** (ou réalisations) de cette expérience, que l'on note Ω . On

désigne également Ω sous le nom d'**univers**. Les éléments de Ω , c'est-à-dire les résultats possibles, sont eux notés ω .

Exemples.

1. lancer de deux dés à 6 faces : les résultats possibles sont les couples d'entiers entre 1 et 6 donc $\Omega = \{1, 2, \dots, 6\} \times \{1, 2, \dots, 6\} = \{1, 2, \dots, 6\}^2$.
2. désintégration d'un noyau radioactif : si on s'intéresse à la durée de vie du noyau, on pose $\Omega =]0, +\infty[$, l'ensemble des réels strictement positifs.

Attention! Une même expérience peut être décrite de plusieurs façons différentes : si deux joueurs lancent deux dés chacun à leur tour, on peut poser $\Omega = \{1, 2, \dots, 6\}^4$ ou $\Omega = \{2, 3, \dots, 12\}^2$. L'objectif de l'étude doit entrer en ligne de compte pour déterminer Ω .

2 Evénements et variables aléatoires

2.1 Evénement aléatoire

Un **événement aléatoire** est un événement lié à une expérience aléatoire : il peut se réaliser ou non, et sa réalisation, ou sa non-réalisation, dépend exclusivement du résultat ω de cette expérience. Mathématiquement, un événement aléatoire se représente par la donnée de l'ensemble des éléments ω de Ω pour lesquels cet événement est réalisé.

Exemple. Lancer de deux dés à 6 faces

L'événement "le résultat est inférieur ou égal à 4" est représenté par le sous-ensemble

$$\{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (1, 3), (2, 2), (3, 1)\}$$

de $\Omega = \{1, 2, \dots, 6\}^2$.

2.2 Représentation ensembliste

On a l'habitude, en Probabilités, d'identifier un événement et le sous-ensemble de Ω qui le représente. Cette identification joue un rôle fondamental : les notions et opérations logiques que l'on définit sur les événements correspondent à celles définies en théorie des ensembles. Cette correspondance est résumée dans le tableau suivant, où A et B sont deux événements.

Terminologie probabiliste	Terminologie ensembliste
résultat possible	ω , élément de Ω
événement	A , sous-ensemble de Ω
A est réalisé	$\omega \in A$
A implique B	$A \subset B$
A ou B	$A \cup B$
A et B	$A \cap B$
contraire de A	A^c , complémentaire de A
événement impossible	\emptyset
événement certain	Ω
A et B sont incompatibles	$A \cap B = \emptyset$

Attention! On ne considère pas en général tout sous-ensemble de Ω comme un événement. Par exemple, si on lance deux dés indiscernables, le résultat $\omega = (1, 2)$ n'est pas distinguable de $\omega = (2, 1)$ donc le sous-ensemble $\{(1, 2)\}$ n'est pas un événement.

2.3 Propriétés

2.3.1 Réunion et intersection d'événements

On note $A \cup B$ l'événement réalisé si et seulement si l'un au moins des événements A et B est réalisé. L'événement $A \cup B$ pourrait se lire A ou B si le ou en français ne signifiait pas tantôt "soit l'un, soit l'autre", tantôt "au moins l'un des deux". On préférera donc dire " A union B ".

On note $A \cap B$ l'événement réalisé si et seulement si les deux événements A et B sont réalisés. On le note parfois également $\{A; B\}$.

L'événement $A \cap B$ se lit A et B ou bien "A inter B".

Voici quelques propriétés :

$$\begin{aligned} A \cup A^c &= \Omega, A \cap A^c = \emptyset \\ A \cup \Omega &= \Omega, A \cap \Omega = A \\ A \cup \emptyset &= A, A \cap \emptyset = \emptyset \\ A \cup A &= A, A \cap A = A \\ (A \cap B)^c &= A^c \cup B^c, (A \cup B)^c = A^c \cap B^c \end{aligned}$$

Les opérations \cap et \cup sont **commutatives** et **associatives** :

$$\begin{aligned} A \cup B &= B \cup A, A \cap B = B \cap A \\ (A \cup B) \cup C &= A \cup (B \cup C), (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C) \end{aligned}$$

Les opérations \cap et \cup sont **distributives** l'une vis à vis de l'autre :

$$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C), (A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$$

Ces propriétés se généralisent à une famille quelconque d'événements.

2.3.2 Implication

On écrit $A \subseteq B$ si la réalisation de A implique celle de B, et on dit que A implique B ou que A est contenu dans B.

Si $A \subseteq B$ et $B \subseteq A$ alors $A = B$.

Les propositions $A \subseteq B^c$ ou $B \subseteq A^c$ équivalent à $A \cap B = \emptyset$: on dit dans ce cas que A et B sont **incompatibles** ou **disjoints**.

2.3.3 Différence et différence symétrique

$B \cap A^c$ est un événement réalisé si B est réalisé sans que A le soit. En particulier, si $A \subseteq B$, il est commode d'écrire

$$B \cap A^c = B - A$$

la différence de B et de A.

La différence symétrique de deux événements A et B est l'événement réalisé si l'un des deux seulement est réalisé.

$$A \Delta B = (A \cap B^c) \cup (A^c \cap B) = (A \cup B) - (A \cap B).$$

Cela correspond au "ou exclusif" en français. Si $A \subseteq B$, on a évidemment $A \Delta B = B - A$.

2.4 Variable aléatoire

Quand on étudie un phénomène aléatoire, on est amené à étudier des grandeurs numériques (ou vectorielles) liées à celui-ci. En termes vagues, une variable aléatoire est un nombre ou un vecteur (variable) lié à une expérience aléatoire, dont la valeur dépend exclusivement du résultat $\{\omega\}$ de cette expérience. Mathématiquement, il s'agit donc tout simplement d'une fonction sur l'ensemble Ω . Si cette fonction est à valeurs dans \mathbb{R} , on parle de **variable aléatoire réelle**. Nous donnerons une définition plus formelle par la suite.

Exemples.

1. lancer de deux dés à 6 faces : notons X la somme obtenue sur les deux dés, qui n'est autre que la fonction

$$\begin{aligned} X : \quad \Omega &\mapsto \{2, \dots, 12\} \\ \omega = (\omega_1, \omega_2) &\mapsto \omega_1 + \omega_2 \end{aligned}$$
2. désintégration d'un noyau radioactif : notons X la durée de vie du noyau, qui n'est autre que la fonction identité.

3. Si A est un événement aléatoire, la variable aléatoire indicatrice de A , notée $\mathbb{1}_A$, vaut 1 si A est réalisé, 0 sinon :

$$\begin{aligned} \mathbb{1}_A : \Omega &\mapsto \{0, 1\} \\ \omega &\mapsto \mathbb{1}_{\{\omega \in A\}} \end{aligned}$$

3 Tribus et probabilités

Passons maintenant à la théorie mathématique proprement dite en commençant par introduire les notions de tribu et d'espace probabilisable, avant la définition des probabilités.

Définition 1. Une famille \mathcal{A} de sous-ensembles d'un ensemble Ω est une **tribu** ou **σ -algèbre** sur Ω si elle satisfait aux trois axiomes suivants :

- (i) $\Omega \in \mathcal{A}$.
- (ii) Si $A \in \mathcal{A}$, alors $A^c \in \mathcal{A}$.
- (iii) Pour toute suite $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de \mathcal{A} , on a $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}$.

Exemples.

1. Si A est un sous-ensemble de Ω , la famille $\{A, A^c, \Omega, \emptyset\}$ est une tribu sur Ω dite **tribu engendrée** par l'événement A .
2. La tribu $\{\Omega, \emptyset\}$ est appelée **tribu triviale** sur Ω .

Définition 2. On appelle **espace probabilisable** un couple (Ω, \mathcal{A}) où Ω est un ensemble et \mathcal{A} une tribu sur l'ensemble Ω . Quand un espace probabilisable est fixé, on dit que \mathcal{A} est **la tribu des événements**.

La modélisation d'un phénomène aléatoire et d'une famille d'événements commence par le choix d'un espace probabilisable qui rend compte de l'ensemble des réalisations envisagées et des événements qui peuvent être sujets de l'étude. Nous pouvons maintenant définir la notion de probabilité.

Définition 3. Soit (Ω, \mathcal{A}) un espace probabilisable. Une **probabilité** \mathbb{P} sur cet espace est une application de \mathcal{A} dans \mathbb{R}^+ satisfaisant :

- (i) $\mathbb{P}(\Omega) = 1$.
- (ii) **Propriété de σ -additivité** : pour toute suite $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments disjoints deux à deux de \mathcal{A} ,

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(A_n).$$

Le triplet $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ est appelé **espace probabilisé** ou **espace de probabilité**.

Proposition 1. Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. On peut montrer les propriétés suivantes :

- (i) On a : $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$.
- (ii) Pour toute suite finie $(A_i)_{1 \leq i \leq n}$ d'éléments disjoints deux à deux de \mathcal{A} ,

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(A_i).$$

- (iii) Si $A, B \in \mathcal{A}$ et si $A \subseteq B$, on a

$$\mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B) \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(B - A) = \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A).$$

- (iv) Pour tout $A \in \mathcal{A}$, on a : $\mathbb{P}(A) \in [0, 1]$.
- (v) Pour tout $A \in \mathcal{A}$, on a : $\mathbb{P}(A^c) = 1 - \mathbb{P}(A)$.
- (vi) Pour toute suite croissante $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de \mathcal{A} , c'est-à-dire tels que $A_n \subset A_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(A_n).$$

(vii) Pour toute suite décroissante $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de \mathcal{A} , c'est-à-dire tels que $A_{n+1} \subset A_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(A_n).$$

Proposition 2. (Formule de Poincaré)

Si $n \geq 2$, pour toute suite finie $(A_i)_{1 \leq i \leq n}$ d'éléments de \mathcal{A} , on a :

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(A_i) - \sum_{1 \leq i < j \leq n} \mathbb{P}(A_i \cap A_j) + \sum_{1 \leq i < j < k \leq n} \mathbb{P}(A_i \cap A_j \cap A_k) - \dots + (-1)^{n-1} \mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n).$$

4 Espaces probabilisés discrets

4.1 Définition

Un ensemble **dénombrable** est, par définition, un ensemble qui peut être mis en bijection avec une partie de \mathbb{N} : un ensemble fini est donc dénombrable.

Définition 4. On appelle **espace probabilisable discret** un espace probabilisable (Ω, \mathcal{A}) où Ω est dénombrable et où $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$, l'ensemble des parties (ou sous-ensembles) de Ω .

Une probabilité \mathbb{P} sur un espace probabilisable discret $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ est définie dès que l'on connaît les probabilités des réalisations élémentaires $\{\omega\}$. En effet, puisque ces réalisations sont incompatibles deux à deux, on a :

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{\omega \in A} \mathbb{P}(\{\omega\})$$

pour tout sous-ensemble A de Ω .

4.2 Probabilité uniforme sur un ensemble fini

La probabilité uniforme sur un ensemble fini Ω est celle qui attribue la même valeur à la probabilité de chaque réalisation élémentaire $\{\omega\}$:

$$\mathbb{P}(\{\omega\}) = \frac{1}{|\Omega|},$$

où $|\Omega|$ désigne le cardinal (nombre d'éléments) de Ω . Par conséquent, on a :

$$\mathbb{P}(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$$

pour tout événement $A \subset \Omega$.

Généralement, quand on parle de choix "au hasard" sur un ensemble fini, on sous-entend que ce choix est fait au moyen de la probabilité uniforme, c'est-à-dire en donnant à chaque élément de l'ensemble les mêmes chances d'être choisi. On s'aperçoit également qu'il est impossible de définir une probabilité uniforme sur un ensemble non fini.

Exemple. Modélisation.

On lance n fois un dé à 6 faces équilibré et on cherche la probabilité d'obtenir k fois ($k \leq n$) le nombre 6. Une réalisation est une succession de n entiers compris entre 1 et 6 donc $\Omega = \{1, \dots, 6\}^n$ et $|\Omega| = 6^n$. L'événement "obtenir k fois le nombre 6" est représenté par le sous-ensemble

$$A_k = \{(x_1, \dots, x_n) | x_i = 6 \text{ pour } k \text{ indices exactement}\}.$$

Pour obtenir une réalisation appartenant à A_k , il nous faut d'abord choisir les k indices des x_i valant 6, puis affecter aux x_i restants un entier entre 1 et 5. On a donc $|A_k| = C_n^k 5^{n-k}$ et

$$\mathbb{P}(A_k) = C_n^k \frac{5^{n-k}}{6^n},$$

où $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ est le nombre de combinaisons de k objets parmi n .

Si $n = 3$, on a $A_0 = \frac{5^3}{6^3} = \frac{125}{216}$, $A_1 = 3 \times \frac{5^2}{6^3} = \frac{75}{216}$, $A_2 = 3 \times \frac{5}{6^3} = \frac{15}{216}$ et $A_3 = \frac{1}{216}$. On vérifie que

$$\mathbb{P}(\Omega) = \mathbb{P}(A_0 \cup A_1 \cup A_2 \cup A_3) = \mathbb{P}(A_0) + \mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(A_2) + \mathbb{P}(A_3) = 1.$$