Année 2020-2021
L3 — Mathématiques
HLMA502 Topologie

Feuille d'exercices 3

⚠ Les exercices portent sur la compacité, à l'exception du premier « exercice supplémentaire » qui donne un exemple d'espace topologique dans lequel un point peut être adhérent à une partie sans être limite d'aucune suite de points de cette partie.

Exercice 1. Soit X un ensemble infini. On le munit de la « topologie du complémentaire fini » (exercice 9 feuille TD2). Montrer que X est quasi-compact.

Exercice 2. Dans $M_n(\mathbb{R})$ muni de la topologie usuelle, déterminer si les parties suivantes sont compactes : (i) l'ensemble des matrices inversibles ; (ii) l'ensemble des matrices diagonales ; (iii) l'ensemble des matrices de déterminant 1 ; (iv) l'ensemble $O(n)$ des matrices orthogonales ; (v) l'ensemble $SO(n)$ des matrices orthogonales de déterminant 1.

Exercice 3. Soit (X, d) un espace métrique. Si A, B sont deux parties de X, on pose $d(A, B) := \inf\{d(x, y) \mid x \in A, y \in B\}$.

1. Est-ce-que ceci définit une distance sur $\mathcal{P}(X)$? Sur $\mathcal{P}(X) \setminus \{\emptyset\}$?
2. Si A et B sont deux compacts non vides de X, montrer qu'il existe $a \in A$ et $b \in B$ tels que $d(A, B) = d(a, b)$.
3. Lorsque $X = \mathbb{R}^n$ usuel, montrer que la conclusion de la question précédente est encore vraie si on ne suppose que A compact et B fermé.
4. Donner un exemple de deux fermés A, B de $\mathbb{R}^2$ tels que $d(A, B) = 0$ mais $d(x, y) > 0$ quels que soient $x \in A$ et $y \in B$.

Exercice 4. Soit $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue strictement croissante telle que $\lim_{u\to-\infty} \varphi(u) = -1$ et $\lim_{u\to+\infty} \varphi(u) = +1$. On prolonge φ à l'ensemble $\overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$ en posant $\varphi(\pm\infty) := \pm 1$. On pose alors :

$$d(x, y) := |\varphi(x) - \varphi(y)| \qquad \forall x, y \in \overline{\mathbb{R}}$$

1. Montrer que d est une distance sur $\overline{\mathbb{R}}$, et que $\varphi : \overline{\mathbb{R}} \to [-1, 1]$ est un homéomorphisme.
2. En déduire que $(\overline{\mathbb{R}}, d)$ est un espace métrique compact, et que la restriction de d à $\mathbb{R}$ induit la topologie usuelle sur $\mathbb{R}$. Montrer que $\mathbb{Q}$ est dense dans $\overline{\mathbb{R}}$.

Exercice 5. Soient A et B deux compacts disjoints d'un espace métrique (X, d). Montrer qu'il existe deux ouverts disjoints U et V tels que $A \subset U$ et $B \subset V$. Si vous avez utilisé la distance pour construire U et V, essayez maintenant de démontrer ce résultat dans un espace topologique *séparé* X, sans distance.

Exercice 6. Soit K un compact d'un espace métrique (X, d), et soit U un ouvert de X qui contient K. Montrer qu'il existe un réel $r > 0$ tel que, quel que soit $x \in X$, si $d(x, K) < r$ alors $x \in U$.

Exercice 7. On considère l'espace vectoriel normé ℓ^∞ (suites réelles bornées) muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$. Montrer que la boule unité fermée n'est pas compacte, en construisant une suite $(x^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ de points de la boule unité fermée telle que $d_\infty(x^{(k)}, x^{(l)})$ soit toujours « grande » si $k \neq l$.

Exercice 8. Soit X un espace métrique compact. Montrer que si une suite de points de X ne possède qu'une seule valeur d'adhérence, alors elle est convergente. Construire un exemple pour voir que l'hypothèse de compacité est essentielle.

Exercice 9. Soit X un espace métrique compact, et soit $f : X \to X$ une application telle que $d(f(x), f(y)) < d(x, y)$ quels que soient $x, y \in X$ distincts.

1. Montrer qu'il existe un point $a \in X$ tel que $d(a, f(a)) \leq d(x, f(x))$ pour tout $x \in X$.
2. Montrer que ce point a est l'unique point fixe de f.

Exercice 10. Soit X un espace métrique. On considère une suite décroissante $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de parties compactes non vides de X.

1. Rappeler pourquoi $K := \bigcap_{n\in\mathbb{N}} K_n$ n'est pas vide.
2. Montrer que si U est un ouvert de X contenant K, alors il existe un $n \in \mathbb{N}$ tel que U contienne K_n.
3. Démontrer les mêmes résultats en supposant que X est un espace topologique (pas nécessairement métrique).

Exercice 11. Soit X un espace topologique compact, et soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite *monotone* de fonctions continues $f_n : X \to \mathbb{R}$. On suppose que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers une fonction continue $f : X \to \mathbb{R}$. Montrer que la convergence est uniforme.

Exercices supplémentaires

Exercice 12. On considère un ensemble X infini non dénombrable (par exemple $X = \mathbb{R}$) et on fixe un point $p \in X$. On considère la topologie dont les ouverts sont : toutes les parties ne contenant pas p, et toutes les parties qui contiennent p et dont le complémentaire est dénombrable.

1. Montrer qu'il s'agit bien d'une topologie sur X.
2. Montrer que p appartient à l'adhérence de $X \setminus \{p\}$, mais qu'il n'existe pas de suite de points de $X \setminus \{p\}$ qui converge vers p (indication : si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de points, alors $\{x_n \,;\, n \in \mathbb{N}\}$ est dénombrable...)

Exercice 13. Le but de cet exercice est de démontrer que le produit de deux espaces topologiques compacts est compact. Soient $(X, \mathcal{O}_X)$ et $(Y, \mathcal{O}_Y)$ deux espaces compacts. On sait déjà que $X \times Y$, muni de la topologie produit, est séparé, donc il ne reste plus qu'à étudier la propriété de recouvrement ouvert.

Soit $(W_i)_{i\in I}$ un recouvrement ouvert de $X \times Y$. On dit qu'un sous-ensemble $A \subset X$ est **bon** s'il existe une sous-famille finie de $(W_i)_{i\in I}$ qui recouvre $A \times Y$.

1. Montrer que si $A_1, \ldots, A_N$ sont bons, alors $A_1 \cup \cdots \cup A_N$ est bon également.
2. On veut montrer que pour tout $x \in X$, il existe un voisinage ouvert $U(x)$ de x dans X qui est bon. Pour cela :
   a) Soit $y \in Y$ fixé dans cette question. Pourquoi existe-t-il un $i(y) \in I$ tel que $(x, y) \in W_{i(y)}$? En déduire qu'il existe un voisinage ouvert $U(y)$ de x dans X, et un voisinage $V(y)$ de y dans Y, tels que $(x, y) \in U(y) \times V(y) \subseteq W(y)$.
   b) Montrer qu'il existe $y_1, \ldots y_N \in Y$ tels que $Y = V(y_1) \cup \cdots \cup V(y_N)$.
   c) En déduire que $U(y_1) \cap \cdots \cap U(y_N)$ est bon.
3. En déduire que X est bon, et observer que c'est ce qu'on voulait montrer.

Exercice 14. Soit $f : X \to Y$ une application continue. On suppose que X est compact.

1. Montrer que f est une application **fermée**, au sens où l'image $f(F)$ de tout fermé F de X est un fermé de Y.
2. On suppose de plus que f est bijective. Montrer qu'alors f est un homéomorphisme.

Exercice 15. Montrer que tout métrique compact X est **séparable**, c'est-à-dire qu'il existe une partie finie ou dénombrable A qui est dense dans X.

Exercice 16. On se place dans $\mathbb{R}^n$ usuel. Si A et B sont deux parties non vides de $\mathbb{R}^n$, on pose $A + B := \{a + b \mid a \in A, b \in B\}$.

1. Montrer que si A est ouverte, alors $A + B$ est ouverte.
2. Montrer que si A et B sont compactes, alors $A + B$ est compacte.
3. Montrer que si A est compacte et B est fermée, alors $A + B$ est fermée.
4. Trouver un exemple (dans $\mathbb{R}^2$) avec A et B fermées, mais $A + B$ non fermée.

Exercice 17. Soient X et Y deux espaces métriques, et soit $f : X \to Y$ une application. On suppose que la restriction de f à tout compact de X est continue. Montrer qu'alors f est continue, par exemple de la manière suivante :

1. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de points de X qui converge vers $a \in X$. Que peut-on dire de l'ensemble $\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$? Que peut-on en déduire sur l'ensemble $\{f(x_n) \mid n \in \mathbb{N}\}$?
2. En déduire que f est séquentiellement continue en tout point de X.

Exercice 18. On se place dans $X = C^0([0,1],\mathbb{R})$ muni de la distance d_∞. Montrer que le sous-ensemble $\{f \in X \mid f([0,1]) = [0,1]\}$ est fermé et d'intérieur vide.

Exercice 19. **Suite de l'exercice 9**. Soit X un espace métrique compact, et soit f : $X \to X$ une application telle que $d(f(x), f(y)) < d(x,y)$ quels que soient $x, y \in X$ distincts. On veut montrer qu'il est « facile » de trouver une approximation de l'unique point fixe de f. Pour cela, soit x_0 n'importe quel point de X. On définit une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par récurrence, en posant $x_{n+1} := f(x_n)$ pour tout $n \geq 0$.

1. Montrer que la suite réelle $(d(x_n, a))_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.
2. Soit $(x_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ une sous-suite convergeant vers $b \in X$. Que peut-on dire de la suite $((x_{\varphi(n)+1})_{n\in\mathbb{N}}$? En déduire que $b = a$, puis que $x_n \to a$ lorsque $n \to +\infty$.

Exercice 20. Soit K une partie compacte non vide de $\mathbb{R}^n$ muni de la distance euclidienne. Le but de l'exercice est de montrer qu'il existe une unique boule fermée de rayon minimal qui contient K. Pour cela :

1. Pourquoi existe-t-il une boule fermée contenant K ?
2. Soit $\rho := \inf\{r > 0 \mid \exists x \in X, K \subseteq D(x,r)\}$. Montrer qu'il existe un point $a \in X$ tel que $K \subseteq D(a,\rho)$, ce qui prouve qu'il existe bien *une* boule de rayon minimal qui contient K...
3. Si K est contenu dans $D(a,\rho)$ et dans $D(b,\rho)$ avec $a \neq b$, montrer qu'il est aussi contenu dans une boule fermée de centre $(a+b)/2$ et de rayon $r < \rho$. Que peut-on en conclure ?

Exercice 21. Soit X un espace métrique compact, et soit $f : X \to X$ une application continue. On pose $K_1 := f(X)$ puis, par récurrence, $K_{n+1} := f(K_n)$. Montrer que $\bigcap_{n\geq 1} K_n \neq \emptyset$. En déduire qu'il existe un sous-ensemble non vide A de X tel que $f(A) = A$.

Exercice 22. Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ une application continue, et soit $a \in \mathbb{R}^n$ un point donné. On définit une suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ par récurrence, en posant $x_0 := a$ et $x_{k+1} := f(x_k)$ pour $n \geq 0$. On suppose que la suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ ne possède qu'une seule valeur d'adhérence. Montrer qu'elle converge.