Licence 2- 2020/2021

HLMA304 : Arithmétique
Thierry Mignon
Septembre 2020

Feuille de TD n°1

(Les exercices signalés par une étoile ($\star$) pourront ne pas être abordés en première lecture. Ce sont des exercices déjà traités en cours, ou redondants, ou d'une difficulté plus élevée.)

1 Divisibilité, nombres premiers

Exercice 1. ($\star$) Montrer que si $a|b$ et $b|c$, alors $a|c$.

Exercice 2. On divise deux entiers distincts a et b par leur différence $a-b$. Comparer les quotients et les restes obtenus.

Exercice 3. Montrer qu'il existe une infinité de nombres premiers de la manière suivante : Supposons qu'il n'y ait qu'un nombre fini de nombres premiers. Soit p le plus grand d'entre eux. Obtenir une contradiction en considérant un diviseur premier de $p!+1$.

Exercice 4. Les nombres de Fibonacci sont les membres de la suite

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, \ldots$$

donnée par $F_1 = 1, F_2 = 1$ et $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ pour $n \geq 3$. Montrer, par récurrence, que tous les couples de nombres de Fibonnaci consécutifs sont premiers entre eux (n'ont pas de diviseurs communs autres que 1 et -1).

Exercice 5. Existe-t-il des entiers premiers avec 0. Si oui, lesquels ?

Exercice 6. ($\star$) Nous allons montrer que tout nombre entier n qui n'est divisible ni par 2 ni par 5 a un multiple qui s'écrit exclusivement avec le chiffre 1.

(1) Montrer que parmi les nombres $1, 11, 111, 1111, \ldots, \underbrace{111\cdots111}_{(n+1 \text{ chiffres})}$ il y en a au moins deux, m et m', qui donnent le même reste après division par n.
(2) Faire la différence $m - m'$ et conclure.

Exercice 7. Trouver tous les entiers $n \in \mathbb{Z}$ tels que $n^3 - 1$ soit un nombre premier.

Exercice 8. Montrer qu'un nombre $n \in \mathbb{N}$ est premier si $n \geq 2$ et n n'est divisible par aucun nombre premier inférieur à $\sqrt{n}$. En déduire que 113 et 167 sont premiers.

Exercice 9. ($\star$) Soient $a \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ tels que le nombre $a^n - 1$ soit premier. Montrer que $a = 2$ et ensuite que n est premier.

2 pgcd, ppcm

Exercice 10. Soient $a, b \in \mathbb{Z}$. Montrer que l'ensemble $a\mathbb{Z} \cap b\mathbb{Z}$ est un sous-groupe de $\mathbb{Z}$. En déduire qu'il existe $m \in \mathbb{Z}$ tel que $m\mathbb{Z} = a\mathbb{Z} \cap b\mathbb{Z}$. Calculer le générateur positif de $25\mathbb{Z} \cap 10\mathbb{Z}$.

Exercice 11. Calculer, à l'aide de l'algorithme d'Euclide :

$$\text{pgcd}(56, 35), \quad \text{pgcd}(309, 186), \quad \text{pgcd}(1024, 729), \quad \text{pgcd}(12075, 4655)$$

Exercice 12. Montrer que si a et b sont premiers entre eux, alors $\text{pgcd}(a+b, a-b) = 1$ ou 2.

Exercice 13. Calculer $d = \text{pgcd}(12075, 465, 345)$.

Exercice 14. ($\star$) Soient p, q deux entiers distincts ($p > 0, q > 0$), les inégalités suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Justifier.
(1) $\text{pgcd}(p, q) > 1$
(2) $\text{pgcd}(p, q) > p$
(3) $\text{pgcd}(p, q) \leq \min(p, q)$
(4) $\text{pgcd}(p, q) \leq |p - q|$
(5) $\text{pgcd}(p, q) < pq$

Exercice 15. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que :

$$\text{pgcd}(n, n^2 + 1) = 1, \qquad \text{pgcd}(n^2 + n, n^3 + 1) = n + 1.$$

Exercice 16.
(1) Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation $mn = m + n$.

(2) Trouver tous les couples d'entiers strictement positifs (a, b) tels que $a+b = \text{ppcm}(a, b)$ (diviser par le pgcd).

Exercice 17. ($\star$) Trouver tous les couples d'entiers strictement positifs (a, b) tels que $a + b = \text{pgcd}(a, b) + \text{ppcm}(a, b)$.

Exercice 18. Soient a, b deux entiers tels que $a + b = 173$. Trouver $\text{pgcd}(a, b)$.

3 Bezout, Euclide étendu et lemme de Gauss

Exercice 19.

(1) Calculer, à l'aide de l'algorithme d'Euclide étendu, $d_1 = \text{pgcd}(56, 35)$. En déduire deux entiers x et y tels que : $56x + 35y = d_1$.

(2) Mêmes questions pour :

$$d_2 = \text{pgcd}(309, 186), \quad d_3 = \text{pgcd}(1024, 729), \quad d_4 = \text{pgcd}(12075, 4655).$$

Exercice 20. Soit a et b, deux entiers, et d leur pgcd. D'après le théorème de Bezout, il existe deux entiers u et v tels que

$$au + bv = d.$$

Montrer que u et v sont premiers entre eux.

Exercice 21. ($\star$) Montrer que si $d = \text{pgcd}(a, b)$ et si le couple $(u_0, v_0) \in \mathbb{Z}^2$ vérifie $au_0 + bv_0 = d$, les autres couples (u, v) vérifiant $au + bv = d$ sont les couples (u_k, v_k) définis pour chaque $k \in \mathbb{Z}^*$ par :

$$\begin{cases} u_k = u_0 + kb_1, \\ v_k = v_0 - ka_1 \end{cases}$$

où a_1 et b_1 sont définis par $a = da_1$ et $b = db_1$.

Exercice 22. Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ les équation

$$5x - 18y = 4, \quad 6x + 15y = 28.$$

Exercice 23. Soit a, b, c et d quatre entiers, démontrer les assertions suivantes :

1. $(\text{pgcd}(a, b) = d) \iff (\text{pgcd}(ac, bc) = dc)$
2. $\begin{cases} \text{pgcd}(a, b) = 1 \\ \text{pgcd}(a, c) = 1 \end{cases} \implies (\text{pgcd}(a, bc) = 1)$

3. $(\text{pgcd}(a,b)=1) \iff \forall m \geq 2, \forall n \geq 2, (\text{pgcd}(a^m,b^n)=1)$
4. $(\text{pgcd}(a,b)=1) \iff (\text{pgcd}(a+b,ab)=1)$
5. $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $(\text{pgcd}(a,b)=d \iff \text{pgcd}(a^n,b^n)=d^n)$

Exercice 24. Trouver les couples $(m,n) \in \mathbb{Z}^2$ tels que $4n^4+1=3m^2+3$.

4 Décomposition en facteurs premiers

Exercice 25. Soit n un entier positif. Montrer que si p est premier et $p|a^n$, alors $p|a$.

Exercice 26. ($\star$) On a $120=2^3 3^1 5^1$ et $900=2^2 3^2 5^2$. Que valent $\text{pgcd}(120,900)$ et $\text{ppcm}(120,900)$.

Exercice 27. Décomposer 720 et 1400 en facteurs premiers. En déduire $\text{pgcd}(1400,720)$ et $\text{ppcm}(1400,720)$.

Exercice 28. ($\star$) On compte le nombres de diviseurs positifs d'un nombre donné n, avec 1 et n inclus.

(1) Combien de diviseurs $8=2^3$ a-t-il ? Même question pour $16=2^4$, $32=2^5$, $27=3^3$.

(2) Combien de diviseurs $18=2^1 3^2$ a-t-il ? Même question pour $36=2^2 3^2$, $72=2^3 3^2$, $180=2^2 3^2 5$.

(3) Soit $n=p_1^{e_1}p_2^{e_2}\cdots p_r^{e_r}$ avec les p_i des premiers distincts, et les $e_i \in \mathbb{N}$. Combien de diviseurs n a-t-il ?

Exercice 29. Montrer, à l'aide du théorème de décomposition en facteurs premiers, que : Si $a,b \in \mathbb{N}^*$ sont premiers entre eux, si $ab=c^n$ avec $c,n \in \mathbb{N}^*$, alors il existe $a',b' \in \mathbb{N}^*$ tels que ${a'}^n=a$ et ${b'}^n=b$.

Exercice 30. Montrer que si un entier $a>0$ est à la fois un carré et un cube alors c'est une puissance sixième. Généraliser au cas d'une puissance n-ième et une puissance m-ième.

Exercice 31. ($\star$) On veut résoudre l'équation $y^2=x^3-x$ pour les nombres entiers.

(1) Montrer que, si x est impair, alors x, $(x-1)/2$ et $(x+1)/2$ sont des carrés. Montrer que, si x est pair, alors $x-1$ et $x+1$ sont des carrés.

(2) Trouver les entiers n tels que n et $n+1$ soient tous les deux des carrés. Trouver tous les entiers n tels que n et $n+2$ soient tous les deux des carrés. Trouver enfin toutes les solutions (y,x) de l'équation.

Exercice 32. ($\star$) Montrer que l'application $f : \mathbb{N}\times\mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ définie par $f(x,y)=2^x(2y+1)-1$ est une bijection.