Exercices chapitre 1 : modèles discrets à une population

Exercice 1 (Suite arithmétique)**.** En 2000, l'île de Ré compte 10 000 aigrettes. Chaque année elle gagne 100 aigrettes.

1. Quel est votre pronostic sur le devenir de la population d'aigrettes ? Extinction ? Survie avec saturation ? Explosion ? Autre ?

   On note p_n le nombre d'aigrettes (comptées en milliers) l'année $2000 + n$.
2. Que vaut p_0 ?
3. Ecrire une relation de récurrence entre p_{n+1} et p_n.
4. Calculer p_n en fonction de n. Déterminer alors $\lim_{n\to+\infty} p_n$.

Exercice 2 (Suite géométrique)**.** En 2000, l'île de Ré compte 10 000 aigrettes. Chaque année 5% des oiseaux disparaissent. Reprendre les questions de l'exercice précédent.

Exercice 3 (Suite arithmético-géométrique)**.** En 2000, une petite ville compte 10 000 habitants. Chaque année 5% des habitants migrent vers la grande ville, mais 100 nouveaux habitants arrivent. On note p_n le nombre d'habitants l'année $2000 + n$.

1. Déterminer la fonction f telle que $p_{n+1} = p_n + f(p_n)$ pour tout $n \geq 0$.
2. Déterminer l'unique nombre ℓ vers lequel la suite (p_n) peut tendre.
3. On pose $v_n = p_n - \ell$. Trouver une relation de récurrence entre v_{n+1} et v_n. Calculer v_n en fonction de n.
4. Calculer p_n en fonction de n. Quel est le devenir de la population de la ville ?

Exercice 4 (Explosion)**.** On donne

$$\begin{cases} p_0 = 1 \\ p_{n+1} = p_n + p_n^2. \end{cases}$$

1. Quels sont les comportements possibles de la suite (p_n) quand $n \to +\infty$?
2. Montrer que la suite est croissante.
3. En déduire que $\lim_{n\to+\infty} p_n = +\infty$.

Exercice 5 (Modèle logistique discret)**.** On considère le modèle logistique discret avec $r = 1$:

$$\begin{cases} 0 < p_0 < 1 \text{ donné} \\ p_{n+1} = p_n + p_n(1 - p_n). \end{cases}$$

Dans ce cas précis ($r = 1$) on va montrer que $p_n \to 1$ (survie avec saturation).

1. Construire le tableau de variations de la fonction g définie par

   $$g(x) = x + x(1 - x) = 2x - x^2.$$

   En déduire que $0 < p_n < 1$ pour tout entier n.

2. Montrer que la suite (p_n) est croissante.
3. En déduire que $p_n \to 1$.
4. Que se passe t il si $p_0 = 2$? Et si $1 < p_0 < 2$? Et si $p_0 > 2$?

Exercice 6 (Suite de Fibonacci)**.** On considère la suite récurrente définie par

$$\begin{cases} u_0 = u_1 = 1 \\ u_{n+2} = u_n + u_{n+1}. \end{cases}$$

décrivant une population de lapins.

1. Calculer les premiers termes. Quel est votre pronostic ?
2. Montrer que la suite est croissante. En déduire que $u_n \to +\infty$.
   En fait on peut calculer tous les termes. Allons y !
3. Déterminer les réels $\alpha < \beta$ solutions de $x^2 - x - 1 = 0$.
4. Déterminer les réels A et B pour que la suite (v_n) définie par $v_n = A\alpha^n + B\beta^n$ vérifie $v_0 = v_1 = 1$.
5. Montrer que la suite (v_n) vérifie le problème initial de Fibonacci. Déterminer alors $\lim_{n\to+\infty} v_n$.

Exercice 7 (Examen 2014-2015)**.**

1. On considère le modèle discret pour une population suivant

$$\begin{cases} w_0 \text{ donné} \\ w_{n+1} = \frac{1}{2} w_n. \end{cases}$$

   Quelle est la fonction de croissance f qui permet d'écrire $w_{n+1} = w_n + f(w_n)$? Quel type de croissance est-ce ? De quelle type est la suite (w_n) ? Calculer w_n. Quel est le devenir de cette population ?
2. On considère le modèle discret pour une population suivant

$$\begin{cases} q_0 = 1 \\ q_{n+1} = \frac{1}{2} q_n + 2. \end{cases}$$

   En un mot que se passe-t-il par rapport au modèle précédent ? En posant $w_n = q_n - 4$ montrer qu'on se ramène au cas précédent. En déduire q_n. Quel est le devenir de cette population ?
3. On considère le modèle discret pour une population suivant

$$\begin{cases} p_0 = 1 \\ p_{n+1} = \frac{2p_n}{4p_n+1}. \end{cases}$$

   Proposer un changement « q_n = une fonction de p_n » qui permet de se ramener au cas précédent. Quel est le devenir de cette population ?

Exercices chapitre 2 : matrices

Exercice 8 (Opérations sur les matrices)**.** Dans chacun des cas suivant, calculer la matrice $A+B$ (si cette somme est possible) et les matrices AB et BA (si ces produits sont possibles).

1. Calculer $A+B$ et $B+A$ pour $A = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{smallmatrix}\right)$ et $B = \left(\begin{smallmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{smallmatrix}\right)$.
2. Calculer AB et BA pour $A = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 2 \end{smallmatrix}\right)$ et $B = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 1 \end{smallmatrix}\right)$. Que constatez-vous ?
3. Calculer AB et AC pour $A = \left(\begin{smallmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 1 \end{smallmatrix}\right)$, $B = \left(\begin{smallmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 2 & -2 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ et $C = \left(\begin{smallmatrix} 3 & 1 & -3 \\ 0 & 2 & 6 \\ -1 & 2 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ Que constatez-vous ?
4. Faire le produit de $A = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 2 \end{smallmatrix}\right)$ et $B = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ -1 \end{smallmatrix}\right)$.

Exercice 9 (Produit avec les matrices identité)**.** Soit $A = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{smallmatrix}\right)$. Par quelle matrice identité peut-on multiplier A par la gauche ? Qu'obtient-on ? Même question en multipliant à droite de A. Généraliser à une matrice de taille quelconque.

Exercice 10 (Puissance d'une matrice diagonalisable)**.** On se donne les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ -4 & 1 \end{pmatrix} \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \quad Q = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Calculer les produits PQ, QP, QAP. En déduire le calcul de A^n pour n entier quelconque.

Exercice 11 (Puissance d'une matrice diagonalisable)**.** On se donne les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad P = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad Q = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Calculer les produits PQ, QP, QAP. En déduire le calcul de A^n pour n entier quelconque.

Exercice 12 (Inversibilité)**.** Les matrices suivantes sont-elles inversibles ?

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 0 & 6 & 5 \\ 0 & 8 & -2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 1 & -3 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Exercice 13 (Calcul de l'inverse)**.** Vérifier que les matrices suivantes sont inversibles, puis calculer leur inverse :

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$$

Exercice 14 (Calcul de l'inverse)**.** Montrer que les matrices suivantes sont inversibles et calculer leur inverse :

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Exercice 15 (Diagonalisation)**.** On considère la matrice suivante

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -6 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que A admet deux valeurs propres qui sont 2 et -1.
2. Diagonaliser A.
3. En déduire le calcul des puissances de A.

Exercice 16 (Diagonalisation)**.** On considère la matrice suivante

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que A admet deux valeurs propres qui sont 3 et 1.
2. Diagonaliser A.
3. En déduire le calcul des puissances de A.

Exercice 17 (Trigonalisation)**.** On considère la matrice suivante

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que A admet une valeur propre « double » qui est 1.
2. Chercher tous les vecteurs propres associés à la valeur propre 1 ; en déduire que A n'est pas diagonalisable.
3. Soit P la matrice suivante :
$$P = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}.$$
Vérifier que P est inversible et que $P^{-1}AP$ est une matrice triangulaire supérieure égale à
$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$
4. Montrer que
$$T^n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$
5. En déduire le calcul des puissances de A.

Exercices chapitre 2 : dynamique discrète de plusieurs populations

Exercice 18. On veut étudier une population de chauve-souris femelles. Une étude sur un échantillon de 9 individus femelles a permis de vérifier que ces 9 chauve-souris donnaient naissance à 12 chauve-souris (dont 6 femelles) et qu'une seule (sur 9) survivait la première année. A partir de la deuxième année, les chauve-souris sont plus prolifiques : chacune donne naissance à deux chauve-souris par an (en moyenne 1 mâle et 1 femelle). On a enfin constaté que sur 3 individus âgés d'un an et plus, deux seront vivants un an plus tard.

1. En utilisant les hypothèses ci-dessus, modéliser l'évolution des effectifs entre l'année n et l'année $n+1$.
2. Vérifier que la matrice qui encode cette évolution est la suivante :
$$A = \begin{pmatrix} 2/3 & 1 \\ 1/9 & 2/3 \end{pmatrix}.$$
3. Trouver les valeurs propres de cette matrice. Calculer les vecteurs propres associés à chacune de ces valeurs propres.
4. A est elle diagonalisable ? Si oui, la diagonaliser.
5. En déduire l'évolution de la population en fonction du nombre d'années écoulées et des populations initiales à l'instant initial.
6. Que se passe-t-il en temps grand ?

Exercice 19. [Modèle matriciel de taille 2, d'après "Mathématiques et statistiques pour les sciences de la nature", G. Biau, J. Droniou, M. Herzlich] On considère une population d'animaux sauvages divisée en deux classes d'âge, (les jeunes et les adultes), et l'on appelle $e_i(n)$ $i = 1, 2$ les effectifs dans la i-ième classe d'âge au temps n, f_i et m_i le taux de natalité et de mortalité des individus de la classe i, et enfin p_1 la proportion d'individus passant de la classe 1 à la classe 2.

1. Écrire la matrice A telle que : $E(n+1) = AE(n)$ où $E(n)$ est le vecteur : $\begin{pmatrix} e_1(n) \\ e_2(n) \end{pmatrix}$.
   En déduire que $E(n) = A^n E(0)$.
2. On prend ici $f_1 = 0$, $p_1 = 1/2$, $m_1 = 1/4$, $f_2 = 2$ et $m_2 = 3/4$. On admet que les valeurs propres sont $5/4$ et $-3/4$. Diagonaliser la matrice A et en déduire $E(n)$ en fonction de n et des conditions initiales $e_1(0), e_2(0)$.
3. Montrer qu'avec les choix précédents des constantes $f_1, p_1, \ldots$, et pour tout valeur initiale $P(0)$ non nulle, lorsque t tend vers l'infini, le rapport $e_1(t)/e_2(t)$ tend vers une limite égale à $a/a+b$, où a, b sont les coefficients du vecteur propre correspondant à la valeur propre $5/4$.

Exercice 20. [Modèle matriciel de taille 3] On veut étudier l'évolution d'une population d'insectes que l'on suppose structurée en trois classes d'âge : les larves, les adultes et les insectes âgés. L'unité de temps choisie est la semaine et on note x_n, y_n et z_n l'effectif des larves, des adultes et des individus âgés en début de semaine n.

1. La matrice qui modélise l'évolution de la population entre la semaine n et la semaine $n+1$ est la suivante :
$$A = \begin{pmatrix} 1/2 & 9/4 & 0 \\ 1/4 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/4 & 1/4 \end{pmatrix}.$$
En une ou deux phrases, faire des hypothèses sur l'évolution des populations qui pourraient conduire à cette matrice.
2. Trouver les valeurs propres de cette matrice. Calculer les vecteurs propres associés à chacune de ces valeurs propres.
3. A est elle diagonalisable ? Si oui, la diagonaliser.
4. En déduire une expression explicite de x_n, y_n, z_n en fonction des conditions initiales x_0, y_0, z_0.
5. On note $p_n = x_n + y_n + z_n$ la population totale. Montrer que :
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{x_n}{p_n} = \frac{12}{17}.$$

Exercice 21 (Modèle matriciel de taille 2, puis 3)**.** Le Cincle plongeur est un passereau des ruisseaux de montagne. Ses caractéristiques démographiques sont les suivantes : les oiseaux sont adultes au bout d'un an, le sex-ratio est équilibré à la naissance, chaque année les femelles de plus d'un an pondent en moyenne un œuf, le taux de survie entre 0 et 1 an est de $0,5$, et il est de $0,4$ au-delà d'un an. Modéliser l'évolution démographique du cincle plongeur. Trouver les valeurs propres de la matrice. En déduire le devenir de la population.

Des observations plus élaborées conduisent en fait à distinguer les oiseaux dont l'âge est compris entre 1 et 2 ans de ceux de plus de 2 ans. On constate alors que 20% des femelles entre 1 et 2 ans et 60% des femelles au-delà de 2 ans se reproduisent, et qu'elles pondent en moyenne 4 œufs par an, indépendamment de leur âge. Enfin, le taux de survie des plus de 2 ans est en fait estimé à $0,6$ (celui des 1-2 ans restant estimé à $0,4$). Comment le modèle ci-dessus est-il modifié ? Déterminer le devenir de la population.

Exercice 22. On veut prédire l'évolution d'une population structurée en trois classes que l'on observe chaque année ;

- les individus de moins d'un an, dont l'effectif à l'année n sera notée j_n ;
- les individus entre un et deux ans, dont l'effectif à l'année n sera noté a_n ;
- les individus de deux ans et plus dont l'effectif à l'année n sera noté v_n. L'évolution entre l'année n et l'année $n+1$ est donnée par la matrice suivante :
$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 10 \\ 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

1. Expliquer en quelques mots la signification biologique des coefficients de la matrice A.
2. Calculer le polynôme caractéristique de A et vérifier qu'il est égal à :

$$\chi_A(X) = -(X - 9/2)(X^2 + 1).$$

3. Calculer les trois valeurs propres de A.
4. En utilisant la propriété **??**, déduire le comportement asymptotique de la population en général, ainsi que la répartition entre les trois classes sur le long terme.

Exercice 23 (Examen 2014-2015)**.** On veut étudier l'évolution d'une population de mammifères. On modélise cette évolution en faisant les hypothèses qui suivent. La population est structurée en trois classes d'âge : les jeunes qui ont moins de 10 ans, les adultes entre 10 et 20 ans et les individus âgés de plus de 20 ans. Jusqu'à 30 ans la mortalité est négligeable, puis une fois l'âge de 30 ans atteint, tous les individus meurent rapidement. Seuls les adultes se reproduisent : entre 10 et 20 ans, on estime que chaque individu femelle donne naissance à 8 jeunes (le sex-ratio sera supposé égal à un). On observe la population sur des intervalles de 10 ans. On note x_n, y_n et z_n les effectifs respectifs des jeunes, des adultes et des individus âgés à l'année $10n$. Par exemple, y_3 est égal au nombre d'individus adultes au bout de 30 années.

1. Justifier le fait que la matrice qui modélise l'évolution des trois classes de la population entre l'année $10n$ et l'année $10(n+1)$ est la matrice suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

2. Montrer que $\det(A - \lambda I) = -\lambda(\lambda^2 - 4)$.
3. En déduire que les valeurs propres de A sont $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 2$,$\lambda_3 = -2$.
4. Calculer un vecteur propre non nul X_1, X_2, X_3 associé à chaque valeur propre.
5. En déduire une matrice de passage P, son inverse P^{-1}, et une matrice diagonale D telle que telle que $A = PDP^{-1}$ soit diagonale.
6. En déduire une expression explicite de x_n, y_n, z_n en fonction des conditions initiales x_0, y_0, z_0.