

# TP Algorithme Acceptation-Rejet

Jean-Michel Marin

On s'intéresse à la variable aléatoire  $X$  définie sur  $\mathbb{R}$  de densité  $f$  telle que

$$f(x) \propto \tilde{f}(x)$$

$$\tilde{f}(x) = [0.7 \exp(-x^2/2) + 0.3 \exp(-x^2/2 + 7(x - 7/2))] .$$

Soit  $c = \int_{\mathbb{R}} \tilde{f}(x) dx$  et donc

$$f(x) = \frac{\tilde{f}(x)}{c} .$$

On souhaite générer un échantillon de densité  $f$  par acceptation-rejet en partant d'un échantillon généré sous une loi de densité  $g$ . Nous avons

$$\frac{\tilde{f}(x)}{g(x)} \leq \tilde{k} .$$

1 Parmi les propositions suivantes quels couples  $(g, \tilde{k})$  sont valides?

1.  $\mathcal{N}(2.1, 3^2)$  et  $\tilde{k} = 11$  ;
2.  $\mathcal{St}(3)$  et  $\tilde{k} = 300$  ;
3.  $\mathcal{Cau}(0, 1)$  et  $\tilde{k} = 40$ .

```
target <- fonction(x){ 0.7*exp(-x^2/2)+0.3*exp(-x^2/2+7*(x-7/2)) }
curve(target,-10,20)
```

```
toop <- fonction(x) { target(x)/dnorm(x,2.1,3) }
optimize(toop,c(-10,20),maximum=TRUE)
# 1 OUI
```

```
toop <- fonction(x) { target1(x)/dt(x,3) }
optimize(toop,c(-10,20),maximum=TRUE)
# 2 OUI
```

```
toop <- fonction(x) { target1(x)/dcauchy(x,0,1) }
optimize(toop,c(-10,20),maximum=TRUE)
# 3 NON
```

2 Parmi les propositions suivantes quel couple  $(g, \tilde{k})$  est le plus efficace en termes de nombres de simulation ?

1.  $\mathcal{N}(2.1, 3^2)$  et  $\tilde{k} = 11$ ;
2.  $\mathcal{St}(3)$  et  $\tilde{k} = 300$ ;
3.  $\mathcal{Cau}(0, 1)$  et  $\tilde{k} = 40$ .

La proposition 1 est la plus efficace.

3 On choisit finalement d'utiliser pour  $g$  une loi  $\mathcal{N}(2.1, 3^2)$  avec  $\tilde{k} = 11$ . En utilisant ce couple  $(g, \tilde{k})$  simuler 100000 réalisations indépendantes suivant  $f$ . Evaluer le taux d'acceptation. En déduire une valeur approchée de la constante de normalisation  $c$ .

```
test <- TRUE ; ktilde <- 11 ; N <- 10000
x <- rep(0,N) ; compteur <- 0
for (i in 1:N)
{
  while (test)
  {
    y <- rnorm(1,2.1,3)
    paccept <- target(y)/(dnorm(y,2.1,3)*ktilde)
    if (runif(1) <= paccept) test <- FALSE
    compteur <- compteur+1
  }
  x[i] <- y
  test <- TRUE
}
```

```
hist(x,prob=TRUE,nclass=50)
c <- integrate(target,-10,20)$val
curve(target(x)/c,col="red",lwd=4,add=TRUE)
```

```
ktilde*N/compteur
```