Année 2020-2021
L3 — Mathématiques
HLMA502 Topologie

Feuille d'exercices 2

Exercice 1. Dans cet exercice on note $\mathrm{int}(A)$ l'intérieur d'une partie A. Soit X un espace topologique. Soient A et B des parties de X.

1. Montrer que $X \setminus \overline{A} = \mathrm{int}(X \setminus A)$ et $X \setminus \mathrm{int}\, A = \overline{X \setminus A}$.
2. Montrer que $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$. Montrer que $\overline{A \cap B} \subseteq \overline{A} \cap \overline{B}$, et donner un exemple où l'inclusion est stricte (dans $\mathbb{R}$, par exemple).
3. Montrer que $\mathrm{int}(A \cap B) = \mathrm{int}(A) \cap \mathrm{int}(B)$. Montrer que $\mathrm{int}(A) \cup \mathrm{int}(B) \subseteq \mathrm{int}(A \cup B)$, et donner un exemple où l'inclusion est stricte (dans $\mathbb{R}$, par exemple).

Exercice 2. Soit X un espace topologique. Soit A une partie de X munie de la topologie induite. Montrer que les fermés de A sont les parties de la forme $A \cap F$ avec F fermé dans X.

Exercice 3. Soient X, Y des espaces topologiques. On munit $X \times Y$ de la topologie produit. Soient $A \subseteq X$ et $B \subseteq Y$

1. Montrer que si A et B sont fermés alors $A \times B$ est fermé.
2. Montrer que $\overline{A \times B} = \overline{A} \times \overline{B}$.

Exercice 4. Soient X et Y deux espaces métriques. On se donne des fermés F et G de X tels que $X = F \cup G$, et des applications continues $f : F \to Y$ et $g : G \to Y$ telles que $f(x) = g(x)$ pour tout $x \in F \cap G$. Montrer que l'application $h : X \to Y$, définie par $h(x) := f(x)$ si $x \in F$ et $h(x) := g(x)$ si $x \in G$, est continue. Donner un contre-exemple lorsque F et G ne sont plus tous les deux fermés.

Exercice 5. Soit X un espace métrique. La **frontière** d'une partie $A \subseteq X$ est l'ensemble des points $x \in X$ tels que tout voisinage de x contient à la fois un point de A et un point qui n'est pas dans A.

1. Déterminer la frontière dans $\mathbb{R}$ des parties suivantes : $[0, 1]$, $]0, 1]$, $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$.
2. Montrer que, par définition, $\mathrm{Fr}(A) = \overline{A} \cap \overline{(X \setminus A)}$. En déduire que $\mathrm{Fr}(A) = \overline{A} \setminus \mathring{A}$
3. Montrer que $\mathrm{Fr}(\overline{A}) \subseteq \mathrm{Fr}(A)$ et $\mathrm{Fr}(\mathring{A}) \subseteq \mathrm{Fr}(A)$. Donner un exemple où ces inclusions sont strictes.

4. Montrer que $\mathrm{Fr}(A \cup B) \subseteq \mathrm{Fr}(A) \cup \mathrm{Fr}(B)$. Donner un exemple d'inclusion stricte (dans $\mathbb{R}$, par exemple).

Exercice 6. Soit (X, d) un espace métrique. Si A est une partie non vide de X et $x \in X$, on définit la **distance** de x à A par :

$$d(x, A) := \inf_{a \in A} d(x, a)$$

1. Montrer que $d(x, A)$ est bien définie. Que vaut $d(x, A)$ lorsque $x \in A$?
2. Déterminer $d(x, A)$ dans les cas suivants : (i) $X = \mathbb{R}$ usuel, $A = \{1/n \mid n \in \mathbb{N}^*\}$ et $x = 0$. (ii) $X = \mathbb{R}^2$ euclidien, $A = \{(s, t) \in \mathbb{R}^2 \mid t = s + 1\}$ et $x = (0, 0)$. (iii) $X = \mathbb{R}^2$ avec d_∞, $A = \{(s, t) \in \mathbb{R}^2 \mid t = s+1\}$ et $x = (0, 0)$. (iv) X ensemble avec sa métrique discrète, A partie non vide quelconque et $x \notin A$. (v) $X = \mathbb{R}$ usuel, $A = \mathbb{Q}$ et $x \in \mathbb{R}$ quelconque.
3. Montrer que, quels que soient $x, y \in X$:

   $$d(x, A) \leq d(x, y) + d(y, A) \quad \text{et} \quad |d(x, A) - d(y, A)| \leq d(x, y)$$

   En déduire que la fonction « distance à A » est continue sur X.
4. Montrer que $d(x, \overline{A}) = d(x, A)$ pour tout $x \in X$.
5. Montrer que $x \in \overline{A}$ si et seulement si $d(x, A) = 0$.

Exercice 7. On note ℓ^∞ l'ensemble de toutes les suites bornées de nombres réels, et pour $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ appartenant à ℓ^∞, on pose $\|x\|_\infty := \sup\{|x_n| \mid n \in \mathbb{N}\}$. Montrer que $\| \cdot \|_\infty$ est une norme sur ℓ^∞. Montrer que l'ensemble des suites nulles à partir d'un certain rang n'est pas fermé dans $(\ell^\infty, \| \cdot \|_\infty)$.

Exercice 8. On note ℓ^1 l'ensemble des suites réelles $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telles que $\sum_{n=0}^{+\infty} |x_n|$ converge. Pour $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ appartenant à ℓ^1, on pose $\|x\|_1 := \sum_{n=0}^{+\infty} |x_n|$. Montrer que $\| \cdot \|_1$ est une norme sur ℓ^1. Montrer que l'ensemble des suites nulles à partir d'un certain rang est dense dans $(\ell^1, \| \cdot \|_1)$.

Exercice 9. On considère un ensemble X infini. On définit $\mathcal{O}$ comme l'ensemble des parties $U \in \mathcal{P}(X)$ dont le complémentaire $X \setminus U$ est soit fini soit X tout entier.

1. Montrer que $\mathcal{O}$ est une topologie sur X.
2. Quels sont les fermés de cette topologie ?
3. Montrer que la topologie n'est pas séparée.
4. Montrer que les suites $(n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(1/n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ convergent vers tout réel.
5. Montrer que si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ possède deux limites différentes, alors en fait elle converge vers tout réel.

Exercices supplémentaires

Exercice 10. Dans un ensemble X muni de la topologie grossière, quelles sont les suites convergentes et quelles sont leurs limites ? Quels sont l'adhérence et l'intérieur d'une partie ? Quelles sont les applications continues à valeurs dans X ? Quelles sont les applications continues définies sur X ?

Exercice 11. Soit X un ensemble infini non dénombrable. On considère l'ensemble des parties $U \in \mathcal{P}(X)$ dont le complémentaire est soit dénombrable soit X tout entier.

1. Montrer que $\mathcal{O}$ est une topologie sur X.
2. Quels sont les fermés de cette topologie ?
3. Montrer que $\mathcal{O}$ n'est pas séparée
4. Montrer qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente si et seulement si elle est constante à partir d'un certain rang.
5. Quelle est l'adhérence de $A :=]-\infty, 0]$? Quels sont les points de $\overline{A}$ qui sont limite d'une suite de points de A ?
6. L'espace topologique $(\mathbb{R}, \mathcal{O})$ est-il métrisable ?

Exercice 12. On considère $X = [0,1[\cup\{2\}$ et $Y = [0,1]$, chacun muni de la distance induite par celle de $\mathbb{R}$ usuel. On définit $f : X \to Y$ par $f(x) = x$ si $x \in [0,1[$ et $f(2) = 1$. Montrer que f est une bijection continue. Est-ce que f est un homéomorphisme ?

Exercice 13. **(lemme d'Urysohn dans les espaces métriques)** Soit X un espace métrique, et soient A et B deux fermés *disjoints* de X. Le lemme d'Urysohn affirme qu'il exise une fonction continue $f : X \to \mathbb{R}$ telle que $0 \leq f \leq 1$, $A = f^{-1}(0)$ et $B = f^{-1}(1)$. Montrer que la fonction $f : X \to \mathbb{R}$ donnée par la formule suivante répond à la question :

$$f(x) := \frac{d(x,A)}{d(x,A) + d(x,B)}$$

Exercice 14. On souhaite montrer que l'ensemble des matrices inversibles $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ est *dense* dans $M_n(\mathbb{R})$. Pour cela, soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ non inversible.

1. Montrer que, si λ est un nombre réel non nul suffisamment proche de 0, alors la matrice $A - \lambda I_n$ est inversible.
2. En déduire qu'il existe une suite de matrices inversibles qui converge vers A.
3. Conclure.

Exercice 15.

1. Soit (X, d) un espace métrique. Montrer que l'adhérence d'une boule ouverte est contenue dans la boule fermée de même centre et même rayon. Donner un exemple (avec un rayon non nul !) où l'inclusion est stricte.

2. Soit (E, N) un espace vectoriel normé, muni de la distance associée. Montrer que l'adhérence d'une boule ouverte (de rayon non nul) est égale à la boule fermée de même centre et même rayon.

Exercice 16. Soit (X, d) un espace métrique, et soit $A \subseteq X$

1. Pour $r > 0$, on pose $V_r(A) := \{x \in X \mid d(x, A) < r\}$. Montrer que $V_r(A)$ est un ouvert contenant A.
2. Montrer que $\overline{A} = \bigcap_{r>0} V_r(A)$. En déduire que tout fermé de X est l'intersection d'une suite décroissante d'ouverts, et que tout ouvert de X est l'union d'une suite croissante de fermés.

Exercice 17. Soit G un sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$ différent de $\{0\}$.

1. Expliquer pourquoi $G \cap \mathbb{R}_+^*$ n'est pas vide. On pose $a := \inf(G \cap \mathbb{R}_+^*)$.
2. Si $a = 0$, montrer que G est dense dans $\mathbb{R}$.
3. Si $a > 0$, montrer que $G = a\mathbb{Z}$.
4. Montrer que l'ensemble $\{m + \sqrt{2}n \mid m, n \in \mathbb{Z}\}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

Exercice 18. Montrer que, dans l'espace ℓ^∞ muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$:

1. L'ensemble $\mathbf{c}$ des suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$ est un sous-espace vectoriel fermé de ℓ^∞.
2. $\mathbf{c}$ est l'adhérence de l'ensemble des suites nulles à partir d'un certain rang.

Exercice 19. On se place dans l'ensemble $\mathbb{Q}$ muni de la distance p-adique pour un certain nombre premier p (voir feuille TD1). Montrer que l'adhérence de $\mathbb{Z}$ est la boule fermée de centre 0 et de rayon 1.

Exercice 20. Approximation des fonctions indicatrices d'ouverts par des fonctions lipschitziennes. Soit (X, d) un espace métrique. Soit U un ouvert de X.

1. Montrer que la fonction $\theta : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ définie par $\theta(s) := \min(1, s)$ vérifie $|\theta(t) - \theta(s)\,| \leq |t - s\,|$ quels que soient $s, t \in \mathbb{R}_+$.
2. Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit $u_n : X \to \mathbb{R}$ par $u_n(x) := \theta(n\, d(x, X \setminus U))$. Montrer que $|u_n(x) - u_n(y)\,| \leq n\, d(x, y)$ quels que soient $x, y \in X$. Montrer que $0 \leq u_n(x) \uparrow_{n\to\infty} \mathbf{1}_U(x)$ pour tout $x \in X$.