Année 2020-2021
L3 — SV Concours
HLMA509 Mathématiques

Devoir maison (à rendre le 5 octobre 2020)

La qualité de la rédaction et de la présentation sera prise en compte dans la notation. Les exercices sont indépendants.

Exercice 1. On considère une suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} 0 < p_0 < 1 \\ p_{n+1} = \dfrac{p_n}{3-2p_n} \end{cases}$$

1. Quelle est la fonction $F(p)$ telle que $p_{n+1} = F(p_n)$?
2. Donner l'allure du graphe de F (un simple dessin est demandé, utilisez un outil numérique si besoin).
3. Montrer que F est croissante sur $[0, 1]$. En déduire que $0 < p_n < 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
4. Simplifier $p_{n+1} - p_n$ de sorte à déterminer son signe. En déduire les variations de la suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$: croissante, décroissante, ni l'un ni l'autre ?
5. Montrer que la suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, déterminer sa limite.

Exercice 2. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = 1 + \dfrac{2}{u_n} \quad \text{pour } n \geq 0 \end{cases}$$

1. Quelle est la fonction $f(p)$ telle que $u_{n+1} = f(u_n)$?
2. Étudier le sens de variation de f sur $[1, 3]$, en déduire que l'intervalle $[1, 3]$ est stable par f. Que peut-on en déduire sur $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$?
3. Soient (v_n) et (w_n) les suites définies par $v_n = u_{2n}$ et $w_n = u_{2n+1}$.
   a) Quelle est la fonction g telle que $v_{n+1} = g(v_n)$?
   b) Quel est le sens de variation de g sur $[1, 3]$?
   c) Montrer que (v_n) est croissante en raisonnant par récurrence.
   d) En déduire que (w_n) est décroissante.
   e) En déduire que (v_n) et (w_n) sont convergentes et déterminer leurs limites respectives.
4. Quelle est la nature de la suite (u_n) ?

$\boxed{\text{Exercice 1}}$

$$\begin{cases} 0 < p_0 < 1 \\ p_{n+1} = \dfrac{p_n}{3-2p_n} \quad \text{pour } n \geq 0 \end{cases}$$

(1) On voit que $p_{n+1} = F(p_n)$ pour $n \geq 0$

où $F(p)$ est la fonction $F(p) = \dfrac{p}{3-2p}$, définie sur $\mathbb{R} - \left\{\frac{3}{2}\right\}$

Le choix de la variable "p" dans la fonction f est arbitraire,

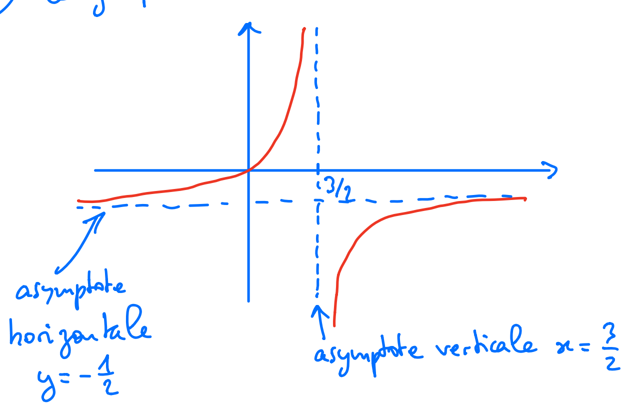
on aurait aussi bien pu écrire $F(x) = \dfrac{x}{3-2x}$

rem : le "choix" de cette fonction F vous paraît peut-être évident...

mais réalisez qu'il existe beaucoup d'autres fonctions F telles que $p_{n+1} = F(p_n)$ $\forall n \geq 0$! Toute autre fonction F qui prend exactement les valeurs $F(p_n) = p_{n+1}$ pour $n = 0, 1, 2, \cdots$ ferait l'affaire, et il en existe énormément (une infinité), mais aucune ne serait aussi naturelle que $F(p) = \dfrac{p}{3-2p}$ ...

il suffit de modifier F comme on veut en dehors des points $p = p_0, p_1, p_2 \cdots$

(2) Le graphe de F ressemble à :



$F(0) = 0$

rem : asymptote horizontale en $\pm\infty$

car $F(p) = \dfrac{p}{3-2p}$

$= \dfrac{p}{p} \dfrac{1}{\frac{3}{p} - 2}$

$= \dfrac{1}{\frac{3}{p} - 2} \longrightarrow -\dfrac{1}{2}$ qd $p \to +\infty$ et qd $p \to -\infty$

(3) Etudions F sur $[0,1]$: la fonction est dérivable, de dérivée

$$F'(p) = \frac{(3-2p) - (-2)p}{(3-2p)^2} = \frac{3-2p+2p}{(3-2p)^2} = \frac{3}{(3-2p)^2}$$

dérivée de $\frac{u}{v}$

on voit que $F'(p) > 0$ pour $0 \leq p \leq 1$

Donc F est strictement croissante sur $[0,1]$

De plus $F(0) = 0$ et $F(1) = \frac{3-2}{2} = 1$.

Donc le tableau de variations sur $[0,1]$ est :

p	0		1
$F(p)$	0	$\nearrow$	1

En particulier, on en déduit que l'intervalle $[0,1]$ est stable par F

(si $0 \leq p \leq 1$ alors $0 \leq F(p) \leq 1$)

et donc $p_n \in [0,1]$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

[raisonnement par récurrence :
- $p_0 \in [0,1]$ par hypothèse
- si $p_n \in [0,1]$, alors $F(p_n) \in [0,1]$ c-à-d $p_{n+1} \in [0,1]$]

(4) $$p_{n+1} - p_n = \frac{p_n}{3-2p_n} - p_n = \frac{p_n - p_n(3-2p_n)}{3-2p_n} = \frac{2p_n^2 - 2p_n}{3-2p_n} = 2\,\frac{p_n(p_n-1)}{3-2p_n}$$

on sait que $0 \leq p_n \leq 1$

$$\left.\begin{array}{l} \text{donc } 3-2p_n \geq 3-2 = 1 > 0 \\ p_n \geq 0 \\ p_n - 1 \leq 0 \end{array}\right\} \text{ donc } p_{n+1} - p_n \leq 0$$

(pour tout $n \geq 0$)

On vient de démontrer que la suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est <u>décroissante</u> :

$$p_{n+1} \leq p_n \quad \forall n \geq 0$$

(5) La suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et minorée (par 0), donc <u>elle converge</u>.

Sa limite ℓ doit vérifier $\ell = F(\ell)$ car F est continue sur $[0,1]$

On résout : $\ell = \frac{\ell}{3-2\ell} \Leftrightarrow 3\ell - 2\ell^2 = \ell \Leftrightarrow 2\ell - 2\ell^2 = 0 \Leftrightarrow 2\ell(1-\ell) = 0$

Donc $\ell = 0$ ou $\ell = 1$. Mais $\ell = 1$ est impossible (car $0 < p_0 < 1$ et la suite décroît) $\boxed{\text{Donc } p_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0}$

Exercice 2

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = 1 + \dfrac{2}{u_n} \quad \text{pour } n \geq 0 \end{cases}$$

① On pose $f(p) = 1 + \dfrac{2}{p}$, définie sur $\mathbb{R}^* =]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$

mêmes remarques que dans l'exercice précédent

② Sur l'intervalle $[1,3]$:

f est dérivable, de dérivée $f'(p) = -\dfrac{2}{p^2}$

On a $f'(p) < 0$ si $2 \leq p \leq 3$.

Donc f est strictement décroissante sur $[1,3]$.

De plus $f(1) = 1 + \dfrac{2}{1} = 3$ et $f(3) = 1 + \dfrac{2}{3} = \dfrac{5}{3}$

p	1		3
$f(p)$	3	$\searrow$	$5/3$

On a $1 < \dfrac{5}{3}$ donc l'intervalle $[1,3]$ est stable par f :

si $1 \leq p \leq 3$ alors $1 \leq f(p) \leq 3$

Comme $u_0 = 1$ appartient à $[1,3]$

et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour $n \geq 0$,

on en déduit que $u_n \in [1,3]$ pour tout $n \geq 0$

(récurrence simple)

③ On pose $v_n = u_{2n}$ suite des termes d'indice pair

$w_n = u_{2n+1}$ suite des termes d'indice impair

(a) $v_{n+1} = u_{2(n+1)} = u_{2n+2} = f(u_{2n+1}) = f(f(u_{2n})) = f(f(v_n))$

ainsi $v_{n+1} = g(v_n)$ pour $g = f \underset{\substack{\uparrow \\ \text{composition}}}{\circ} f$

(b) Comme f est décroissante sur $[1,3]$,

la fonction g est <u>croissante</u> sur $[1,3]$:

si $1 \leq p \leq q \leq 3$

alors $1 \leq f(q) \leq f(p) \leq 3$ car f décroît

et donc $1 \leq f(f(p)) \leq f(f(q)) \leq 3$ car f décroît

c-à-d $1 \leq g(p) \leq g(q) \leq 3$

On pouvait aussi calculer g explicitement et l'étudier...

Ou bien dire que g, comme composée de fonctions dérivables (f et f), est également dérivable avec :

$$g'(p) = (f \circ f)'(p) = f'(f(p))\, f'(p) \geq 0$$

formule de dérivation d'une fonction composée

car $f'(f(p)) < 0$ et $f'(p) < 0$

(c) On montre par récurrence que $v_n \leq v_{n+1}$ $\forall n \geq 0$:

- $v_0 = u_0 = 1$

  $u_1 = f(u_0) = f(1) = 3$

  $v_1 = u_2 = f(u_1) = f(3) = \frac{5}{3}$ déjà calculé

  on a bien $v_0 \leq v_1$

- si $v_n \leq v_{n+1}$, alors $g(v_n) \leq g(v_{n+1})$ car g est croissante

  c-à-d $v_{n+1} \leq v_{n+2}$

donc $v_n \leq v_{n+1}$ $\forall n \geqslant 0$ par récurrence.

(d) On en déduit que $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est <u>décroissante</u>, puisque :

$$\left\{\begin{array}{l} w_{n+1} = u_{2n+3} = f(u_{2n+2}) = f(v_{n+1}) \\ \text{or } v_n \leq v_{n+1} \text{ et } f \text{ est } \underline{\text{décroissante}}, \\ \text{donc } \underbrace{f(v_{n+1})}_{w_{n+1}} \leq \underbrace{f(v_n)}_{w_n} \end{array}\right.$$

⚠ $f(v_n) = f(u_{2n}) = u_{2n+1} = w_n$

(e) La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et majorée (par 3)

donc elle converge, disons vers ℓ.

La suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et minorée (par 1)

donc elle converge, disons vers ℓ'.

Comme g est continue, on a nécessairement $g(\ell) = \ell$ et $g(\ell') = \ell'$

Or $g(p) = f(f(p)) = 1 + \dfrac{2}{f(p)} = 1 + \dfrac{2}{1+\frac{2}{p}}$

$$= 1 + \frac{2p}{p+2} = \frac{p+2+2p}{p+2} = \frac{3p+2}{p+2}$$

donc $g(p) = p \iff \dfrac{3p+2}{p+2} = p$

$\iff 3p+2 = p(p+2)$

$\iff p^2 - p - 2 = 0$ $\quad\Delta = 9$

$\iff p = \dfrac{1\pm 3}{2} = 2$ ou -1

2 est la seule limite possible car $-1 \notin [1,3]$

Donc $u_{2n} \xrightarrow[n\infty]{} 2$ et $u_{2n+1} \xrightarrow[n\infty]{} 2$

(4) Donc $u_n \xrightarrow[n\infty]{} 2$ (la suite des termes pairs et la suite des termes impairs convergent et ont la même limite)

Exercice 3. On considère la suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} p_0 = 1 \text{ et } p_1 = 2 \\ p_{n+1} = \sqrt{p_n p_{n-1}} \text{ pour } n \geq 1 \end{cases}$$

1. Montrer que si $0 < a < b$, alors $a < \sqrt{ab} < b$.
2. Montrer par récurrence que $p_{2n} < p_{2n+1}$ pour tout n.
3. Montrer que $(p_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et que $(p_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
4. En déduire que $(p_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(p_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont convergentes.
5. Posons $\ell := \lim_{n\to\infty} p_{2n}$ et $\ell' := \lim_{n\to\infty} p_{2n+1}$.
   a) Montrer que $\ell' = \sqrt{\ell\ell'}$. En déduire que $\ell = \ell'$.
   b) Soit $x_n := p_n^2 p_{n-1}$. Quelle est la limite de x_n ? Que dire de x_{n+1} en fonction de x_n ? En déduire la valeur de ℓ.
6. Conclusion : pourquoi la suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge-telle, et quelle est sa limite ?

(1) Si $0 < a < b$

alors $a^2 < ab < b^2$

donc $\underbrace{\sqrt{a^2}}_{a} < \sqrt{ab} < \underbrace{\sqrt{b^2}}_{b}$

(2) Montrons que $p_{2n} < p_{2n+1}$ $\forall n \geq 0$ par récurrence sur n :

- $p_0 = 1$ et $p_1 = 2$ on a bien $p_0 < p_1$

- supposons $p_{2n} < p_{2n+1}$

  alors $p_{2n} < \sqrt{p_{2n} p_{2n+1}} < p_{2n+1}$ d'après (1)

  c-à-d $p_{2n} < p_{2n+2} < p_{2n+1}$

  puis $p_{2n+2} < \sqrt{p_{2n+2} p_{2n+1}} < p_{2n+1}$

  c-à-d $\underbrace{p_{2n+2} < p_{2n+3}}_{\text{inégalité voulue}} < p_{2n+1}$

Donc $p_{2n} < p_{2n+1}$ $\forall n \geq 0$

(3) La suite $(p_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante :

On a $p_{2n} < p_{2n+1}$ (question précédente)

donc $p_{2n} < \underbrace{\sqrt{p_{2n}\,p_{2n+1}}}_{p_{2n+2}} < p_{2n+1}$

ainsi $p_{2n} < p_{2n+2}$ et donc $(p_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante

La suite $(p_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante :

on vient de voir que $p_{2n+2} < p_{2n+1}$

on en déduit que :

$$p_{2n+2} < \underbrace{\sqrt{p_{2n+2}\,p_{2n+1}}}_{p_{2n+3}} < p_{2n+1}$$

ainsi $p_{2n+3} < p_{2n+1}$ et donc $(p_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante

(4) On a donc :

$$\underbrace{p_0 < p_2 < p_4 < \dots < p_{2n} < p_{2n+2}}_{\text{la suite } (p_{2n}) \text{ est croissante}} < \dots < \underbrace{p_{2n+3} < p_{2n+1} < \dots < p_3 < p_1}_{\text{la suite } (p_{2n+1}) \text{ est décroissante}}$$

et $p_{2n} < p_{2n+1}$ $\forall n$

(donc tous les p_{2n} sont inférieurs à tous les p_{2k+1})

On en déduit que (p_{2n}) et (p_{2n+1}) convergent :

$\begin{cases} \text{la première est une suite croissante majorée} \\ \text{la deuxième est une suite décroissante minorée} \end{cases}$

⑤ On pose $\ell = \lim_{n\infty} p_{2n}$ et $\ell' = \lim_{n\infty} p_{2n+1}$

(a) Par passage à la limite dans la relation de récurrence :

$$\underbrace{p_{2n+1}}_{\downarrow \atop \ell'} = \sqrt{\underbrace{p_{2n}}_{\downarrow \atop \ell} \underbrace{p_{2n-1}}_{\downarrow \atop \ell'}}$$

on trouve $\ell' = \sqrt{\ell \ell'}$

d'où $(\ell')^2 = \ell \ell'$ d'où $\ell' = \ell$

(b) posons $x_n = p_n^2 p_{n-1}$

alors d'une part $x_n \longrightarrow \ell^3$: $\left\{ \begin{array}{l} \text{si } n \text{ pair alors } p_n^2 \to \ell^2 \text{ et } p_{n-1} \to \ell' \\ \text{si } n \text{ impair alors } p_n^2 \to (\ell')^2 \text{ et } p_{n-1} \to \ell \\ \text{or } \ell = \ell' \ldots \end{array} \right.$

d'autre part :

$$x_{n+1} = p_{n+1}^2 p_n = p_n p_{n-1} p_n$$
$$= p_n^2 p_{n-1}$$
$$= x_n$$

$\left[\begin{array}{l} \text{car } p_{n+1} = \sqrt{p_n p_{n-1}} \\ \text{donc } p_{n+1}^2 = p_n p_{n-1} \end{array} \right]$

La suite (x_n) est constante !

Cette constante est $x_1 = p_1^2 p_0 = 4$

$p_0 = 1$, $p_1 = 2$

$$\boxed{\text{Donc } \ell = \sqrt[3]{4}}$$

$\uparrow$

limite de la suite (p_n)