# Calcul matriciel pour la modélisation en écologie

## L2 Sciences de la Vie

Université de Montpellier – Faculté des Sciences

Septembre 2019

## **Objectif** : Modéliser la dynamique de populations structurées en classes d'âge.

Modèles mathématiques pour décrire dans le temps l'évolution d'une population :
$\rightsquigarrow$ modèles à temps continu qui utilisent des équations différentielles : Malthus, Verhulst, de Lotka – Volterra : pas vus dans ce cours.

$\rightsquigarrow$ modèles à temps discret qui tiennent compte de la structuration de la population selon plusieurs classes d'âge, et qui utilisent le calcul matriciel : en particulier matrices de Leslie.

# Un exemple introductif

On s'intéresse à une population de souris femelles sachant que :

- chacune de ces souris donne naissance en moyenne à une femelle pendant sa première année de vie et à 8 femelles pendant sa deuxième année ;
- la probabilité pour qu'une souris survive une deuxième année est de 0,25 et il n'y a aucune chance qu'elle survive au-delà de deux ans.

On distingue donc deux catégories de souris :

– les juvéniles âgées de moins d'un an

– les adultes dont l'âge est compris entre un et deux ans.

Notons, pour tout instant $k$ (le temps étant compté en années, de sorte que $k$ est entier) $j_k$ le nombre de souris juvéniles, $a_k$ celui des adultes et $n_k = j_k + a_k$ le nombre total de souris dans la population étudiée. On écrit les équations de récurrence suivantes :

Notons, pour tout instant $k$ (le temps étant compté en années, de sorte que $k$ est entier) $j_k$ le nombre de souris juvéniles, $a_k$ celui des adultes et $n_k = j_k + a_k$ le nombre total de souris dans la population étudiée. On écrit les équations de récurrence suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} j_{k+1} & = & j_k + 8a_k \\ a_{k+1} & = & 0{,}25 j_k \end{array} \right.$$

Grâce à ces équations et en connaissant les nombres de juvéniles et d'adultes au temps initial $k = 0$, on peut calculer de proche en proche $j_k$, $a_k$ et $n_k$ successivement pour $k = 1, 2, 3, \cdots$ ,
Par exemple, pour $j_0 = 20$ et $a_0 = 0$

| $k$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $j_k$ | 20 | 20 | 60 | 100 | 220 | 420 | 860 | 1700 | 3420 | 6820 |
| $a_k$ | 0 | 5 | 5 | 15 | 25 | 55 | 105 | 215 | 425 | 855 |
| $n_k$ | 20 | 25 | 65 | 115 | 245 | 475 | 965 | 1915 | 3845 | 7675 |
| $\frac{j_k}{n_k}$ | 1 | 0,8 | 0,92 | 0,87 | 0,89 | 0,89 | 0,89 | 0,89 | 0,89 | 0,89 |
| $\frac{a_k}{n_k}$ | 0 | 0,2 | 0,07 | 0,13 | 0,10 | 0,11 | 0,11 | 0,11 | 0,11 | 0,11 |
| $\frac{n_{k+1}}{n_k}$ | 1,25 | 2,6 | 1,77 | 2,13 | 1,94 | 2,03 | 1,98 | 2,01 | 1,99 | – |

Le calcul de proche en proche est fastidieux !

# Plan du cours

# Partie I : Les matrices

**Définition** Un tableau rectangulaire de nombres réels est appelé **matrice**.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2p} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix} n \text{ lignes } \times p \text{ colonnes}$$

L'élément ou coefficient $a_{ij} \in \mathbb{R}$ se situe à la $i$ème ligne et $j$ème colonne. On note $A = [a_{ij}]_{\substack{i=1,\cdots,n \\ j=1,\cdots,p}}$.

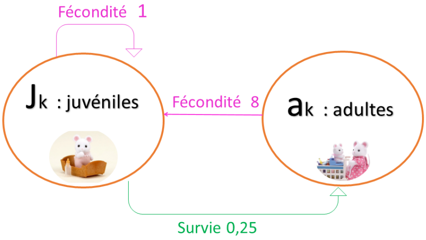
## Exemple

$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 4 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ *est une matrice de* $n = 3$ *lignes et* $p = 3$ *colonnes.* $a_{12} = 2$ *et* $a_{33} = -1$.

## Exemple

*On peut stocker les coefficients de survie et de fécondité des souris femelles de l'exemple introductif dans une matrice :*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 8 \\ 0{,}25 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \longleftarrow \quad \textit{fécondité} \\ \longleftarrow \quad \textit{survie} \end{array}$$



**Définition** Le couple $(n,p)$ est appelé **taille** de la matrice A. On dit que la matrice A est de taille $(n,p)$ ou $n \times p$ où $n =$ nombre de lignes et $p =$ nombre de colonnes.

**Définition** Une matrice de taille $(n,1)$ est appelée **matrice colonne** (ou vecteur colonne). Une matrice de taille $(1,p)$ est appelée **matrice ligne** (ou vecteur ligne).

Exemple

$\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0{,}5 \end{pmatrix}$ *est une matrice colonne de taille* $3 \times 1$.

$\begin{pmatrix} 2 & 0{,}25 \end{pmatrix}$ *est une matrice ligne de taille* $1 \times 2$.

**Définition** Soient deux matrices $A = [a_{ij}]_{\substack{i=1,\cdots,n \\ j=1,\cdots,p}}$ et $B = [b_{ij}]_{\substack{i=1,\cdots,n \\ j=1,\cdots,p}}$ de **même taille** $(n, p)$. On additionne terme à terme les coefficients de $A$ et de $B$ pour obtenir la matrice $A + B = [a_{ij} + b_{ij}]_{\substack{i=1,\cdots,n \\ j=1,\cdots,p}}$ qui est aussi de taille $n \times p$.

Exemple

$$A = \underbrace{\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 4 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}}_{3\times 2} \quad B = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}}_{3\times 2} \quad \underbrace{A + B = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 4 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}}_{3\times 2}.$$

Propriété

Soient $A, B$ et $C$ trois matrices de **même taille** $(n,p)$ et $O_{n,p}$ la matrice de taille $(n,p)$ dont tous les éléments sont nuls.

1) $(A+B)+C = A+(B+C)$ (associativité)
2) $A + O_{n,p} = A$ ($O_{n,p}$ est l'élément neutre pour l'addition)
3) $A+B = B+A$ (commutativité)

**Définition** Soit $A$ une matrice de taille $(n,p)$ et $\lambda$ un nombre réel. On définit la matrice $\lambda A$ comme la matrice dont tous les éléments sont multipliés par $\lambda$. On écrit $\lambda A = [\lambda a_{ij}]_{\substack{i=1,\cdots,n \\ j=1,\cdots,p}}$

Exemple

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 4 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \quad \lambda = 2 \quad \lambda A = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 2 & 8 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}.$$

Propriété

Soient $A$ et $B$ deux matrices de taille $(n,p)$ et $\lambda$ et $\mu$ deux nombres réels.

1) $\lambda(A+B) = \lambda A + \lambda B$
2) $(\lambda+\mu)A = \lambda A + \mu A$
3) $(\lambda\mu)A = \lambda(\mu A)$
4) $1 \times A = A$ et $0 \times A = O_{n,p}$
5) $A + (-A) = O_{n,p}$

Multiplication de deux matrices

**Définition** On appelle produit de la matrice ligne $\begin{pmatrix} a_{11} a_{12} \cdots a_{1n} \end{pmatrix}$ et de la matrice colonne $\begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ \vdots \\ b_{n1} \end{pmatrix}$ le **nombre réel** égal à : $a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + \cdots + a_{1n}b_{n1}$. On écrit :

$$\begin{pmatrix} a_{11} a_{12} \cdots a_{1n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ \vdots \\ b_{n1} \end{pmatrix} = a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + \cdots + a_{1n}b_{n1}.$$

Exemple

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} = 1 \times 4 + 0 \times (-1) + 2 \times 3 = 10.$$

# I. 1 – Opérations sur les matrices

## Multiplication de deux matrices

### Définition

Soit $A = \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix}}_{\text{matrice de taille } (n,\mathbf{p})}$ et $B = \underbrace{\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1q} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2q} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{p1} & b_{p2} & \cdots & b_{pq} \end{pmatrix}}_{\text{matrice de taille } (\mathbf{p},q)}$. Le produit des deux matrices $A$ et $B$ est une matrice $C = AB$ de **taille (n,q)** telle que le coefficient $c_{ik}$ est égal à :

$$c_{ik} = \begin{pmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ip} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{1k} \\ b_{2k} \\ \vdots \\ b_{pk} \end{pmatrix}$$

**N.B** : Le produit $AB$ n'est possible que si le nombre de colonnes de $A$ est égal au nombre de lignes de $B$.

# I. 1 – Opérations sur les matrices

Exemple

*Calculer la matrice C produit de* $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ *et* $B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

*Solution :*

Exemple

*Calculer la matrice C produit de* $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ *et* $B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

*Solution :*

$C = AB = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} =$

$\begin{pmatrix} 2 \times (-1) + 1 \times 0 & 2 \times 2 + 1 \times (1) \\ 1 \times (-1) + 4 \times (0) & 1 \times 2 + 4 \times 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ -1 & 6 \end{pmatrix}$

# I. 1 – Opérations sur les matrices

Exemple

*Calculer la matrice* $D = BA$ *:*

*Solution :*

### Exemple

*Calculer la matrice* $D = BA$ *:*

*Solution :* $D = BA = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} =$

$$\begin{pmatrix} -1 \times (2) + (2) \times 1 & (-1) \times 1 + 2 \times (4) \\ 0 \times (2) + 1 \times (1) & 0 \times 1 + 1 \times 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 7 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

**N.B** : Si le produit $AB$ existe, le produit $BA$ n'existe pas forcément. De plus, si les produits $AB$ et $BA$ sont possibles, alors en général $AB \neq BA$.

### Propriété

Soient $A$ une matrice de taille $(n,p)$, $B$ de taille $(p,q)$, $C$ de taille $(q,s)$, $D$ de taille $(p,q)$ et $E$ de taille $(q,n)$. On a les propriétés de calcul suivantes :

1) $(AB)C = A(BC)$
2) $A(B+D) = AB + AD$
3) $(B+D)E = BE + DE$

# I. 1 – Opérations sur les matrices

## Transposition de matrices

**Définition** Soit $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix}$ $n$ lignes $\times$ $p$ colonnes.

La matrice **transposée** de $A$ notée $A^t$ est la matrice obtenue à partir de $A$ en réécrivant les lignes de $A$ en colonne :

$A^t = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1p} & a_{2p} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix}$ $p$ lignes $\times$ $n$ colonnes. Si $A$ est de taille $(n,p)$ alors la matrice $A^t$ est de taille $(p,n)$.

### Exemple

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \; et \; A^t = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

# I. 2 – Matrices carrées

**Définition** Une matrice dont le nombre de lignes est égal au nombre de colonnes est appelée **matrice carrée**. On dit alors que la matrice est d'**ordre** $n$.

Exemple

$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ *est une matrice carrée d'ordre 3.*

**Définition** On appelle **diagonale** d'une matrice carrée d'ordre $n$, les éléments $a_{11}$, $a_{22}$, ...,$a_{nn}$ de la matrice.

Exemple

$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $2, 0$ *et* $1$ *sont les éléments de la diagonale de la matrice carrée* $A$.

**Définition** Une matrice carrée $D$ est dite **diagonale** si tous ses éléments non diagonaux sont nuls $d_{ij} = 0$ si $i \neq j$. On note alors $D = diag(d_{11}, d_{22}, \cdots, d_{nn})$.

Exemple

$D_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ *et* $D_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ *sont des matrices diagonales.*

**Définition** Une matrice carrée d'ordre $n$ diagonale dont tous les éléments diagonaux sont **égaux à 1** est appelée **matrice identité**. On la note $I_n$.

Exemple

$$I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

## Propriété

Pour toute matrice $A$ de taille $(n,p)$, on a :

$$AI_p = I_nA = A$$

## Exemple

$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ ,

$AI_3 = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} = A$

*et*

$I_2A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} = A.$

# I. 2 – Matrices carrées

## Matrices inversibles

**Définition - propriété** Une matrice carrée $A$ d'ordre $n$ est dite **inversible**, s'il existe une matrice carrée $B$ d'ordre $n$ telle que :

$$AB = I_n$$

La matrice $B$, si elle existe, est **unique** et vérifie :

$$AB = BA = I_n.$$

La matrice $B$ est appelée l'**inverse** de $A$. La matrice inverse $B$ est aussi une matrice d'ordre $n$ et on la note $B = A^{-1}$.
**N.B** : Si $B$ est l'inverse de $A$, $A$ est l'inverse de $B$.

# I. 2 – Matrices carrées

## Déterminant

Le déterminant fournit un critère pour savoir si une matrice est inversible.

**Définition** A chaque matrice carrée $A$, on peut associer un nombre réel appelé **déterminant** de $A$ et noté $det(A)$.

Pour une matrice $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ d'ordre 2, on a :

$$det(A) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc.$$

Propriété admise (critère d'inversibilité)

$A$ est inversible $\iff det(A) \neq 0$ .

# Retour à l'exemple des souris ...

Le système d'équations

$$\left\{\begin{array}{lcl} j_{k+1} & = & j_k + 8a_k \\ a_{k+1} & = & 0{,}25 j_k \end{array}\right.$$

s'écrit sous forme matricielle équivalente :

$$\begin{pmatrix} j_{k+1} \\ a_{k+1} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 8 \\ 0{,}25 & 0 \end{pmatrix}}_{\text{matrice décrivant la dynamique}} \begin{pmatrix} j_k \\ a_k \end{pmatrix}$$

En notant $N_k = \begin{pmatrix} j_k \\ a_k \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} 1 & 8 \\ 0{,}25 & 0 \end{pmatrix}$, l'équation matricielle de la dynamique de la population des souris femelles est :

$$N_{k+1} = AN_k \; , \; k \geq 0.$$

# Retour à l'exemple des souris ...

## Exemple

*Supposons qu'à* $k = 0$*, il y ait dans la population* $j_0 = 20$ *juvéniles et* $a_0 = 0$ *adultes. Calculer* $N_1$*,* $N_2$*,* $N_3$*, etc ...*

# Retour à l'exemple des souris ...

## Exemple

*Supposons qu'à $k = 0$, il y ait dans la population $j_0 = 20$ juvéniles et $a_0 = 0$ adultes. Calculer $N_1$, $N_2$, $N_3$, etc ...*
*Solution :*

$$N_1 = AN_0 = \begin{pmatrix} 1 & 8 \\ 0{,}25 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 20 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$N_2 = AN_1 = \begin{pmatrix} 1 & 8 \\ 0{,}25 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 20 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 60 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$N_3 = AN_2 = \begin{pmatrix} 1 & 8 \\ 0{,}25 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 60 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 100 \\ 15 \end{pmatrix}$$

*etc*

On observe : $N_3 = AN_2 = AAN_1 = AAAN_0 = A^3 N_0$.

De façon générale, pour calculer le vecteur de la population l'année $k$, on a

$$N_k = \underbrace{A}_{1 \text{ fois}} N_{k-1} = \underbrace{AA}_{2 \text{ fois}} N_{k-2} = \cdots = \underbrace{AA \cdots A}_{k \text{ fois}} N_{k-k} = A^k N_0$$

**Pour calculer $N_k$ à partir de la population initiale $N_0$, sans avoir à faire tous ces calculs intermédiaires, il faudrait savoir calculer la matrice $A^k$.**

**Problème :** Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 8 \\ 0{,}25 & 0 \end{pmatrix}$. Calculer $A^k$ pour $0 \leq k \leq 5$.

**Problème :** Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 8 \\ 0{,}25 & 0 \end{pmatrix}$. Calculer $A^k$ pour $0 \leq k \leq 5$.

$A^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ (par convention)

$A^1 = A = \begin{pmatrix} 1 & 8 \\ 0{,}25 & 0 \end{pmatrix}$

$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 8 \\ 0{,}25 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 8 \\ 0{,}25 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 8 \\ 0{,}25 & 2 \end{pmatrix}$

$A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 8 \\ 0{,}25 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 8 \\ 0{,}25 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 8 \\ 0{,}25 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 24 \\ 0{,}75 & 2 \end{pmatrix}$

$A^4 = \begin{pmatrix} 11 & 40 \\ 1{,}25 & 6 \end{pmatrix}$ et $A^5 = \begin{pmatrix} 21 & 88 \\ 2{,}75 & 10 \end{pmatrix}$ et combien vaut $A^k$ pour

$k = 20, 50, 100$ ?

Il y a un cas où c'est facile ... lorsque la matrice est diagonale :

**Proposition**

$$\text{Si } D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix} \text{ alors } D^k = \begin{pmatrix} \lambda_1^k & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2^k & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n^k \end{pmatrix}$$

**Proposition**

Soit $P$ une matrice inversible d'ordre $n$. Soit $A$ une matrice d'ordre $n$ et $D$ une matrice diagonale d'ordre $n$.
Si $A = PDP^{-1}$ alors $A^k = PD^kP^{-1}$, pour $k \geq 0$.

# Méthode de calcul de $A^k$ :

pour calculer $A^k$ connaissant une matrice inversible $P$ et une matrice diagonale $D$ telles que $A = PDP^{-1}$ :

- on calcule $D^k$
- puis on calcule $A^k = PD^kP^{-1}$

Exemple

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 8 \\ 0{,}25 & 0 \end{pmatrix}}_{A} = \underbrace{\begin{pmatrix} 8 & 4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}}_{P} \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}}_{D} \underbrace{\begin{pmatrix} 1/12 & 1/3 \\ 1/12 & -2/3 \end{pmatrix}}_{P^{-1}}$$

- *on calcule* $D^k = \begin{pmatrix} 2^k & 0 \\ 0 & (-1)^k \end{pmatrix}$
- *on calcule* $A^k = PD^kP^{-1} =$

# Méthode de calcul de $A^k$ :

pour calculer $A^k$ connaissant une matrice inversible $P$ et une matrice diagonale $D$ telles que $A = PDP^{-1}$ :

- on calcule $D^k$
- puis on calcule $A^k = PD^kP^{-1}$

Exemple

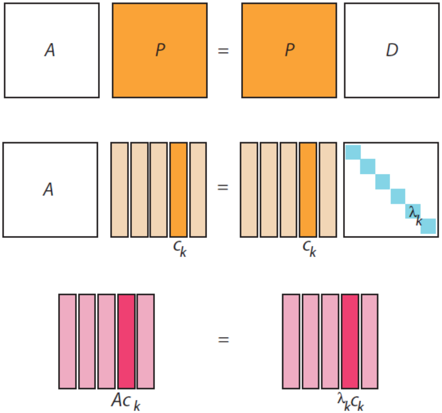
$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 8 \\ 0{,}25 & 0 \end{pmatrix}}_{A} = \underbrace{\begin{pmatrix} 8 & 4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}}_{P} \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}}_{D} \underbrace{\begin{pmatrix} 1/12 & 1/3 \\ 1/12 & -2/3 \end{pmatrix}}_{P^{-1}}$$

- *on calcule* $D^k = \begin{pmatrix} 2^k & 0 \\ 0 & (-1)^k \end{pmatrix}$
- *on calcule* $A^k = PD^kP^{-1} =$ $\frac{1}{12}\begin{pmatrix} 8 \times 2^k + 4 \times (-1)^k & 32 \times 2^k - 32 \times (-1)^k \\ 2^k - (-1)^k & 4 \times 2^k + 8 \times (-1)^k \end{pmatrix}$

# II. 2 – Matrice diagonalisable

**Définition :** Quand il existe $P$ inversible et $D$ diagonale telles que $A = PDP^{-1}$ on dit que A est diagonalisable.

$$A = PDP^{-1} \iff AP = PD$$



Les colonnes de $P$ doivent forcément vérifier une égalité du type :

$$Ac_k = \lambda_k c_k$$

avec $\lambda_k$ un nombre et $c_k$ une matrice colonne non nulle.

**Définition** On dit que $\lambda_k$ est une **valeur propre** de $A$ et que $c_k$ est un **vecteur propre** pour la valeur propre $\lambda_k$ si $Ac_k = \lambda_k c_k$, avec $c_k$ non nul.

Théorème (admis)

Soit $A$ une matrice d'ordre $n$.
$\lambda$ est une valeur propre de $A$ si et seulement si $det(A - \lambda I_n) = 0$.

$\mathcal{P}(\lambda) = det(A - \lambda I_n)$ est appelé le **polynôme caractéristique** de $A$.

### Exemple (trouver les valeurs propres de $A$)

*Le polynôme caractéristique de* $A = \begin{pmatrix} 1 & 8 \\ 0{,}25 & 0 \end{pmatrix}$ *est :*

$$\mathcal{P}(\lambda) \quad = \quad det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 8 \\ 0{,}25 & -\lambda \end{pmatrix} = \cdots$$

### Exemple (trouver les valeurs propres de $A$)

*Le polynôme caractéristique de* $A = \begin{pmatrix} 1 & 8 \\ 0{,}25 & 0 \end{pmatrix}$ *est :*

$$\mathcal{P}(\lambda) \quad = \quad det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 8 \\ 0{,}25 & -\lambda \end{pmatrix} = \cdots = \lambda^2 - \lambda - 2$$

### Exemple (trouver les valeurs propres de $A$)

*Le polynôme caractéristique de* $A = \begin{pmatrix} 1 & 8 \\ 0{,}25 & 0 \end{pmatrix}$ *est :*

$$\mathcal{P}(\lambda) \quad = \quad det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 8 \\ 0{,}25 & -\lambda \end{pmatrix} = \cdots = \lambda^2 - \lambda - 2$$

*C'est un polynôme de degré 2, dont les racines sont...*

## Exemple (trouver les valeurs propres de $A$)

*Le polynôme caractéristique de* $A = \begin{pmatrix} 1 & 8 \\ 0{,}25 & 0 \end{pmatrix}$ *est :*

$$\mathcal{P}(\lambda) \quad = \quad det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 8 \\ 0{,}25 & -\lambda \end{pmatrix} = \cdots = \lambda^2 - \lambda - 2$$

*C'est un polynôme de degré 2, dont les racines sont...* $\lambda_1 = 2$ *et* $\lambda_2 = -1$.

Maintenant, il ne reste plus qu'à déterminer les vecteurs propres $c_1$ et $c_2$ associés à $\lambda_1$ et $\lambda_2$.

# II. 3 – Valeurs propres et vecteurs propres

Comment trouver des valeurs propres et des vecteurs propres ?

On cherche $c_k$ tel que $Ac_k = \lambda_k c_k$ pour $k = 1, 2$.

Exemple (trouver le vecteur propre $c_1$ associé à $\lambda_1$)

- $\lambda_1 = 2$ : $c_1 = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ *doit vérifier* $Ac_1 = 2c_1$ :

$$\begin{pmatrix} 1 & 8 \\ 0{,}25 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} x + 8y \\ 0{,}25x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix}$$
$$\iff \begin{pmatrix} x + 8y \\ 0{,}25x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix}$$

# II. 3 – Valeurs propres et vecteurs propres

## Comment trouver des valeurs propres et des vecteurs propres ?

On cherche $c_k$ tel que $Ac_k = \lambda_k c_k$ pour $k = 1, 2$.

### Exemple (trouver le vecteur propre $c_1$ associé à $\lambda_1$)

- $\lambda_1 = 2$ : $c_1 = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ *doit vérifier* $Ac_1 = 2c_1$ *:*

$$\begin{pmatrix} 1 & 8 \\ 0{,}25 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} x + 8y \\ 0{,}25x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix}$$
$$\iff \begin{pmatrix} x + 8y \\ 0{,}25x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix}$$

*On peut choisir* $x = 8$ *et* $y = 1$ *et* $c_1 = \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \end{pmatrix}$ *mais on aurait pu choisir aussi* $x = 4$ *et* $y = 0{,}5$ *et* $c_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 0{,}5 \end{pmatrix}$ *: tout vecteur proportionnel à* $\begin{pmatrix} 8 \\ 1 \end{pmatrix}$ *convient.*

# II. 3 – Valeurs propres et vecteurs propres

## Comment trouver des valeurs propres et des vecteurs propres ?

Exemple (trouver le vecteur propre $c_2$ associé à $\lambda_2$)

- $\lambda_2 = -1$ : $c_2 = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ *doit vérifier* $Ac_2 = -c_2$ :

# II. 3 – Valeurs propres et vecteurs propres

Comment trouver des valeurs propres et des vecteurs propres ?

Exemple (trouver le vecteur propre $c_2$ associé à $\lambda_2$)

- $\lambda_2 = -1$ : $c_2 = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ *doit vérifier* $Ac_2 = -c_2$ :

*On trouve par exemple* $c_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}$

Avec $P$ la matrice dont les colonnes sont les vecteurs propres $c_1$ et $c_2$ et $D$ la matrice diagonale des valeurs propres $\lambda_1$ et $\lambda_2$, on peut donc écrire : $AP = PD$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 8 \\ 0{,}25 & 0 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} 8 & 4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}}_{P} = \underbrace{\begin{pmatrix} 8 & 4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}}_{P} \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}}_{D}$$

Puis calculer l'inverse de $P$ (si elle existe) et enfin, en multipliant l'égalité à droite par la matrice $P^{-1}$,

$$AP{\color{red}P^{-1}} = PD{\color{red}P^{-1}} \Longleftrightarrow A = PDP^{-1}$$

Mais attention : Une matrice n'est pas toujours diagonalisable.

## Exemple

*La matrice* $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ *n'est pas diagonalisable.*

*En effet :*

- *quel est le polynôme caractéristique ?*
- *quelles sont les valeurs propres ?*
- *pour chaque valeur propre, quel vecteur propre ?*

# Revenons à notre population de souris ...

## Exemple

- *La matrice décrivant la dynamique est* $A = \begin{pmatrix} 1 & 8 \\ 0{,}25 & 0 \end{pmatrix}$
- *On a trouvé les valeurs propres et vecteurs propres de* $A$ *:*

$$\lambda_1 = 2;\ c_1 = \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \lambda_2 = -1;\ c_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}$$

- *On a donc trouvé :* $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ *et* $P = \begin{pmatrix} 8 & 4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ *qui*

  *vérifient* $A = PDP^{-1}$ *avec* $P^{-1} =$

# Revenons à notre population de souris ...

## Exemple

- *La matrice décrivant la dynamique est* $A = \begin{pmatrix} 1 & 8 \\ 0{,}25 & 0 \end{pmatrix}$
- *On a trouvé les valeurs propres et vecteurs propres de A :*

$$\lambda_1 = 2;\ c_1 = \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \lambda_2 = -1;\ c_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}$$

- *On a donc trouvé :* $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ *et* $P = \begin{pmatrix} 8 & 4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ *qui vérifient* $A = PDP^{-1}$ *avec* $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1/12 & 1/3 \\ 1/12 & -2/3 \end{pmatrix}$ *donc A est diagonalisable.*

# Suite et fin de l'exemple des souris

Grâce à la décomposition de $A = PDP^{-1}$, on a :

$$N_k = A^k N_0 = PD^k P^{-1} N_0$$

et on a déjà calculé

$$A^k = \frac{1}{12} \begin{pmatrix} 8 \times 2^k + 4 \times (-1)^k & 32 \times 2^k - 32 \times (-1)^k \\ 2^k - (-1)^k & 4 \times 2^k + 8 \times (-1)^k \end{pmatrix}$$

On peut donc connaissant les effectifs de la population initiale, par exemple, si à l'instant $k = 0$, on a $j_0 = 0$ et $a_0 = 10$ :

- calculer les effectifs des juvéniles et des adultes pour n'importe quel temps $k$.
- évaluer ce que devient la population lorsque $k$ est très grand en fonction de l'effectif de la population initiale $N_0$.

# Suite et fin de l'exemple des souris

Exemple (calculer les effectifs pour n'importe quel $k$)

*Par exemple : pour* $k = 20$*, calculer* $N_{20}$*.*
*Solution :*

# Suite et fin de l'exemple des souris

Exemple (évaluer le devenir de la population lorsque $k \to +\infty$)

*Solution :*

# Partie III : Modèle de Leslie

**Définition** On appelle matrice de Leslie une matrice de la forme :

$$A = \begin{pmatrix} f_1 & f_2 & f_3 & \cdots & f_n \\ s_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & s_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & \cdots & s_{n-1} & 0 \end{pmatrix}$$

Elle modélise la dynamique d'une population structurée en $n$ classes d'âge :

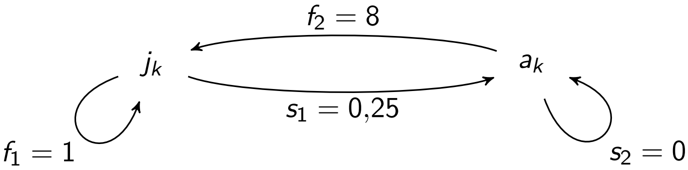
- la première ligne contient les coefficients de fertilité de chaque classe
- la sous-diagonale contient les survies d'une classe d'âge à la suivante.

Une matrice de Leslie a tous ses coefficients positifs ou nuls.

## Exemple

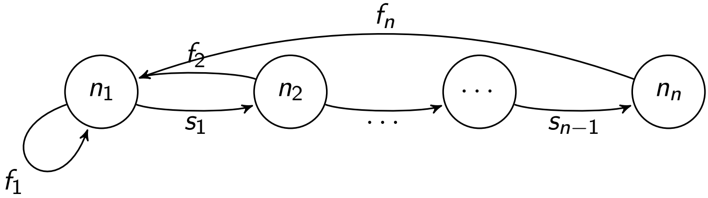
*La matrice* $A = \begin{pmatrix} 1 & 8 \\ 0{,}25 & 0 \end{pmatrix}$ *de l'exemple des souris est une matrice de Leslie*

$$A = \begin{pmatrix} f_1 & f_2 \\ s_1 & 0 \end{pmatrix} \quad \textit{avec}$$



# Schéma du cycle de vie associé à la matrice de Leslie

$$\underbrace{\begin{pmatrix} n_1(k+1) \\ n_2(k+1) \\ \vdots \\ n_n(k+1) \end{pmatrix}}_{N_{k+1}} = \begin{pmatrix} f_1 & f_2 & f_3 & \cdots & f_n \\ s_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & s_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & \cdots & s_{n-1} & 0 \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} n_1(k) \\ n_2(k) \\ \vdots \\ n_n(k) \end{pmatrix}}_{N_k}$$



# Hypothèses du modèle de Leslie

$$\underbrace{\begin{pmatrix} n_1(k+1) \\ n_2(k+1) \\ \vdots \\ n_n(k+1) \end{pmatrix}}_{N_{k+1}} = \begin{pmatrix} f_1 & f_2 & f_3 & \cdots & f_n \\ s_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & s_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & s_{n-1} & 0 \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} n_1(k) \\ n_2(k) \\ \vdots \\ n_n(k) \end{pmatrix}}_{N_k}$$

les éléments de la première ligne représentent les fécondités nettes : $f_i$ correspond au nombre moyen de femelles mises au monde, entre deux instants successifs $k$ et $k+1$, par chaque femelle appartenant à la classe numéro $i$ ;

# Hypothèses du modèle de Leslie

$$\underbrace{\begin{pmatrix} n_1(k+1) \\ n_2(k+1) \\ \vdots \\ n_n(k+1) \end{pmatrix}}_{N_{k+1}} = \begin{pmatrix} f_1 & f_2 & f_3 & \cdots & f_n \\ s_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & s_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & s_{n-1} & 0 \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} n_1(k) \\ n_2(k) \\ \vdots \\ n_n(k) \end{pmatrix}}_{N_k}$$

La sous-matrice diagonale située sous la première ligne et comprenant les $n-1$ premières colonnes, les éléments diagonaux sont les probabilités de survie : $s_i$ est la probabilité qu'une femelle appartenant à la classe numéro $i$ à l'instant $k$ soit vivante dans la classe numéro $i+1$ à l'instant $k+1$.

# Hypothèses du modèle de Leslie

- l'espace et la quantité de nourriture disponibles sont illimités ;
- il n'y pas de migrations ;
- la population est divisée en classes d'âges correspondant à des intervalles de temps de même durée (par exemple, l'année) ;
- les fécondités nettes et les probabilités de survie de chaque classe sont supposées, pour cette modélisation, être les mêmes pour toutes les femelles (en moyenne) et indépendantes du temps ;
- la probabilité de dépasser l'âge de la dernière classe est supposée négligeable. Cette hypothèse peut être relâchée.