Topologie des espaces métriques
HLMA502 2020-21

David Théret

1er octobre 2020

Pictogrammes

désigne un point important

désigne une démonstration ou un exercice que vous devez avoir compris et savoir refaire sans indication lors d'une évaluation.

désigne une démonstration ou un exercice plus difficile, exigible avec des indications précises lors d'une évaluation.

désigne une démonstration ou un exercice très difficile, non exigible lors d'une évaluation.

désigne un point que vous devez savoir compléter (exemple, exercice, démonstration) ; parfois utilisé à l'intérieur des démonstrations) ; exigible lors d'une évaluation.

Introduction

Distance, espaces métriques En 1907, Fréchet définit la notion de *distance*, dans le but d'étendre et unifier les concepts de limite de suite et de fonction continue à des espaces autres que $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{R}^n$: des espaces dont les « points » sont des fonctions, des suites, des courbes, etc.

> *La notion de fonction ainsi comprise a été progressivement étendue dans plusieurs directions [...] et en particulier au point de vue de ce qu'on doit prendre pour variable. Depuis longtemps, on a considéré des fonctions de deux, de trois, ou même de n variables numériques. Les autres généralisations sont plus récentes. Ainsi, M. Le Roux a été amené à étudier des fonctions dont la valeur dépend non plus de n, mais d'une suite infinie de variables indépendantes. MM. Volterra et Arzelà paraissent avoir été les premiers à étudier systématiquement les fonctions dont la valeur dépend de la position et de la forme d'une ligne variable. M Hadamard a considéré une classe particulière de fonctions dont la variable est la forme d'une fonction ordinaire.*
> [M. Fréchet, 1907]

Voisinages, espaces topologiques Ces notions sont formalisées par Hausdorff en 1914. Se donner un espace topologique, c'est se donner un ensemble X et, pour chaque $x \in X$, une famille $\mathcal{V}(x)$ de parties de X appelées « voisinages de x ». Intuitivement, un voisinage de x est une partie qui « entoure » complètement x, une partie dans laquelle il faut obligatoirement entrer si on veut se rapprocher de plus en plus de x. Et, précisément, c'est à partir de cette notion de voisinage que l'on définit la convergence : une suite de points de X converge vers $x \in X$ si elle entre définitivement dans tout voisinage de x.

Quelles sont les conditions que doivent vérifier les voisinages ?

1. Tout point $x \in X$ possède au moins un voisinage.
2. Tout voisinage de x contient x.
3. Tout sur-ensemble d'un voisinage de x est un voisinage de x.
4. L'intersection de deux voisinages de x est encore un voisinage de x.
5. La dernière condition dit que tout voisinage d'un point est également voisinage des points « suffisamment proches » de ce point : tout voisinage V de $x \in X$ contient un voisinage W de x tel que V est un voisinage de tout point de W.

Ouverts Finalement, ces sont les ouverts qui vont s'imposer dans les définitions modernes : un ouvert est une partie qui est voisinage de tous ses points. Quelles sont les conditions que doivent vérifier les ouverts ? Nous le verrons dans le chapitre « Espaces topologiques »...

1 Révisions de L2

Dans le module HLMA412, vous avez vu :

1. Une étude de l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels :
   a) rappel des propriétés de $\mathbb{R}$, en particulier de la différence fondamentale entre $\mathbb{R}$ et $\mathbb{Q}$ (propriété de la borne supérieure) ;
   b) quelques éléments d'étude des suites de nombres réels : suite extraite, valeur d'adhérence, $\limsup$ et $\liminf$, suites de Cauchy et complétude de $\mathbb{R}$;
   c) introduction à la topologie de $\mathbb{R}$: voisinage d'un nombre réel, partie ouverte, intérieur d'une partie, partie fermée, adhérence d'une partie, compacité (définition de Bolzano-Weierstrass).
2. La généralisation à $\mathbb{R}^n$ des notions topologiques vues dans $\mathbb{R}$, en utilisant la norme euclidienne : boules ouvertes, boules fermées, voisinages, ouverts, fermés, compacts, caractérisation séquentielle de ces notions.
3. La généralisation de la notion de continuité aux applications $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$: définition avec « ε et δ », caractérisation séquentielle, opérations sur les fonctions continues (somme, produit, quotient, composée), expression de la continuité en termes d'ouverts et de fermés, continuité et compacité, continuité uniforme.

Le but de ce chapitre est de vous faire réviser assez rapidement ces notions (surtout 1 et 2) que nous allons retrouver (avec d'autres) dans tout le cours de Topologie.

1.1 Suites réelles et topologie de $\mathbb{R}$

1.1.1 Suites réelles, complétude de $\mathbb{R}$

Propriété de la borne supérieure Une propriété fondamentale de $\mathbb{R}$, que $\mathbb{Q}$ ne possède pas, c'est la **propriété de la borne supérieure** : toute partie A de $\mathbb{R}$ qui est non-vide et majorée admet dans $\mathbb{R}$ une borne supérieure notée $\sup(A)$. On rappelle que la borne supérieure de A est par définition le plus petit des majorants de A, s'il existe.

Lorsque $A \subseteq \mathbb{R}$ n'est pas majorée, on pose $\sup(A) := +\infty$.

Exemple. Considérons $A := \{x \in \mathbb{R}\,;\, x^2 < 2\}$, autrement dit $A =]-\sqrt{2}, +\sqrt{2}[$. Clairement A n'est pas vide, clairement A est majorée, et elle admet bien dans $\mathbb{R}$ une borne supérieure qui est $\sqrt{2}$. Rappelons que la borne sup d'une partie A n'a pas de raison d'appartenir à A, et ici ce n'est pas le cas.

Exemple. Mais considérons à présent $B := \{x \in \mathbb{Q}\,;\, x^2 < 2\}$ dans $\mathbb{Q}$. C'est également une partie non-vide et majorée, mais cette fois elle n'admet pas de borne supérieure dans $\mathbb{Q}$: tout majorant M de B dans $\mathbb{Q}$ sera (vu dans $\mathbb{R}$) strictement supérieur à $\sqrt{2}$ (qui n'est pas rationnel, comme vous le savez), et il existera alors un autre rationnel M' majorant B et strictement plus petit que M (prendre n'importe quel rationnel M' tel que $\sqrt{2} < M' < M$), donc il n'existe pas de plus petit majorant de B dans $\mathbb{Q}$, autrement dit B n'admet pas de borne supérieure dans $\mathbb{Q}$.

Voici une application simple mais importante de la propriété de la borne supérieure :

Théorème. *Toute suite réelle croissante majorée est convergente.*

Démonstration. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite croissante majorée. On pose $\ell := \sup\{x_n\,;\, n \in \mathbb{N}\}$. On montre que x_n converge vers ℓ. $\square$

On accepte d'écrire $\lim_{n\to\infty} u_n := +\infty$ lorsque la suite diverge vers $+\infty$, mais il faut bien garder à l'esprit que ce « $+\infty$ » n'est pas un nombre réel. De même avec $-\infty$.

Valeurs d'adhérence d'une suite Considérons une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Une **extractrice** est une application $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante : on sélectionne des nombres entiers $\phi(0) < \phi(1) < \phi(2) < \cdots$ Une **suite extraite** de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de la forme $(u_{\phi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ où ϕ est une extractrice. Une **valeur d'adhérence** de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est un réel ℓ tel que $u_{\phi(n)} \to \ell$ quand $n \to +\infty$ pour une certaine extractrice (jamais unique).

Si une suite converge, alors elle possède une unique valeur d'adhérence : sa limite. Mais une suite peut ne pas converger et posséder une ou plusieurs valeurs d'adhérence.

Limite sup et limite inf d'une suite Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle bornée. Pour chaque $n \in \mathbb{N}$, considérons l'ensemble A_n des valeurs de la suite au-delà du rang n, c'est à dire $A_n := \{u_k\,;\, k \geq n\}$. Clairement chaque A_n est non vide et majoré, donc on peut s'intéresser à $a_n := \sup(A_n)$. Comme $A_{n+1} \subseteq A_n$, on a $a_{n+1} \leq a_n$, donc la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante, et minorée car (u_n) est supposée bornée. Elle possède ainsi une limite finie $\lim_{n\to\infty} a_n$. Cette limite est la **limite sup** de la suite $(u_n)_{n\in N}$:

$$\limsup_{n\to\infty} u_n := \lim_{n\to\infty} \sup\{u_k\,;\, k \geq n\} \in \mathbb{R}$$

De même, on définit la **limite inf** d'une suite minorée $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$:

$$\liminf_{n\to\infty} u_n := \lim_{n\to\infty} \inf\{u_k\,;\, k \geq n\} \in \mathbb{R}$$

Quelques propriétés importantes :

1. On a toujours $\liminf u_n \leq \limsup u_n$.
2. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge si et seulement si $\liminf u_n = \limsup u_n$, et dans ce cas $\lim u_n = \liminf u_n = \limsup u_n$.
3. $\limsup u_n$ est la plus grande valeur d'adhérence de (u_n).
4. $\liminf u_n$ est la plus petite valeur d'adhérence de (u_n).

Suites de Cauchy, complétude Une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une **suite de Cauchy** si :

$$\forall\varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}\,;\, \forall n, p \geq N, |u_n - u_p| < \varepsilon$$

On voit facilement ( ) que toute suite convergente est de Cauchy. Le résultat suivant, fondamental, dit que c'est réciproque : c'est ce que l'on appelle la **complétude** de $\mathbb{R}$.

Théorème. *Toute suite de Cauchy de nombres réels est convergente.*

On pense bien « convergente dans $\mathbb{R}$ », c'est-à-dire qu'on exclut la « convergence » vers $\pm\infty$.

Remarque. Par contraste, $\mathbb{Q}$ n'est pas complet.

1.1.2 Propriétés topologiques des parties de $\mathbb{R}$

L'idée est de comprendre comment une partie $A \subseteq \mathbb{R}$ se comporte par rapport à un point $x \in \mathbb{R}$, au-delà de la dichotomie ensembliste « $x \in A$ » / « $x \notin A$ ». Par exemple : il se peut que x appartienne à A, mais est-ce que A « entoure » complètement x ? Ou encore : il se peut que x n'appartienne pas à A, mais est-ce que A « s'approche infiniment près » de x ? Prenons par exemple $A = [0, 1[$. Le point 1 n'appartient pas à A, mais il est « collé à A ». En revanche, le point 2 est « loin de A », de même d'ailleurs que le point $1,00001$. Le point 0 appartient à A mais il n'est pas « entouré par A », à la différence du point $1/2$ par exemple.

Voisinage d'un point, partie ouverte, intérieur d'une partie Une partie $A \subseteq \mathbb{R}$ est un **voisinage** d'un point $x \in \mathbb{R}$ si « A entoure complètement x dans $\mathbb{R}$ », c'est à dire précisément s'il existe un $r > 0$ tel que $]x - r, x + r[\subseteq A$. Bien noter que s'il existe un tel $r > 0$, alors tout autre $r' \in]0, r[$ convient également.

Exemple. $[0, 1[$ est un voisinage de $1/2$ mais pas de 0.

Une partie $A \subseteq \mathbb{R}$ est **ouverte** si elle est voisinage de tous ses points, c'est à dire si :

$$\forall a \in A, \exists r > 0\,;\,]a - r, a + r[\subseteq A$$

Bien noter que r dépend généralement de a !

Exemple. Tout intervalle ouvert est une partie ouverte. L'ensemble vide, n'ayant pas de points, est ouvert !

On montre facilement que :

1. $\emptyset$ et $\mathbb{R}$ sont ouverts
2. une réunion quelconque de parties ouvertes est ouverte ;
3. une intersection *finie* de parties ouvertes est ouverte.

Si $A \subseteq \mathbb{R}$ est une partie quelconque, l'**intérieur** de A est l'ensemble, noté $\mathring{A}$ ou $\mathrm{int}(A)$, de tous les points dont A est voisinage. De manière équivalente ( ), $\mathring{A}$ est le plus grand ouvert de $\mathbb{R}$ contenu dans A.

Exemple. L'intérieur de $[0, 1[$ est $]0, 1[$.

Parties fermées, adhérence d'une partie Par définition, une partie $A \subseteq \mathbb{R}$ est **fermée** si son complémentaire $\mathbb{R} \setminus A$ est ouvert. Par passage au complémentaire des propriétés des ouverts, on voit que :
- $\emptyset$ et $\mathbb{R}$ sont fermés ;
- une intersection quelconque de fermés est fermée ;
- une réunion *finie* de fermés est fermée.

Exemple. $[0, 1]$ est fermé.

Cette définition n'est pas très intuitive, aussi il est intéressant d'avoir une caractérisation directe de « être une partie fermée ». Le cours de HLMA412 présentait d'abord une caractérisation séquentielle (en termes de suites), mais on va commencer par quelque chose de plus général :
- Un point $x \in \mathbb{R}$ est **adhérent** à $A \subseteq \mathbb{R}$ s'il est « infiniment proche de A », c'est à dire si tout intervalle ouvert centré en x rencontre A :
$$\forall r > 0,]x - r, x + r[\cap A \neq \emptyset$$
Naturellement, tous les points qui appartiennent à A sont adhérents à A. Mais il peut y en avoir d'autres : par exemple 1 est adhérent à $[0, 1[$.
- L'**adhérence** de A, notée $\mathrm{adh}(A)$ ou $\overline{A}$, est l'ensemble des points de $\mathbb{R}$ qui sont adhérents à A. Comme on vient de le voir, on a toujours $A \subseteq \overline{A}$ mais parfois l'inclusion est stricte.
- Une partie $A \subseteq \mathbb{R}$ est **fermée** si et seulement si $A = \overline{A}$.
- L'adhérence $\overline{A}$ est le plus petit fermé de $\mathbb{R}$ qui contient A.

Caractérisation séquentielle de l'adhérence Un point $x \in \mathbb{R}$ est adhérent à une partie $A \subseteq \mathbb{R}$ si et seulement s'il existe une suite de points de A qui converge vers x.

1.1.3 Compacité

Le cours de HLMA412 a introduit la formulation de Bolzano-Weiertrass de la compacité, en termes de suites.

Définition. Une partie $A \subseteq \mathbb{R}$ est **compacte** si toute suite de points de A possède une sous-suite qui converge vers un point de A.

Théorème. *Une partie $A \subseteq \mathbb{R}$ est compacte si et seulement si elle est fermée et bornée.*

Exemple. $[0, 1]$ et $\{0\} \cup \{1/n\,;\, n \in \mathbb{N}^*\}$ sont des parties compactes.

1.2 Propriétés topologiques des parties de $\mathbb{R}^n$

L'idée est de généraliser à $\mathbb{R}^n$ ce que l'on a fait dans $\mathbb{R}$ dans la section précédente. Mais comment ? Qu'a-t-on utilisé pour définir les notions de limite et valeur d'adhérence de suites, suites de Cauchy, parties ouvertes et fermées, parties compactes, etc ? La plupart du temps, uniquement le fait de pouvoir considérer la quantité $|a - b|$ associée à deux points $a, b \in \mathbb{R}$, aussi appelée **distance** entre a et b :

— Dire que $\lim_{k\to+\infty} u_k = \ell$, c'est dire que la distance $|u_k - \ell|$ tend vers 0 quand k tend vers l'infini.
— Toutes les notions de parties ouvertes, fermées, etc ont utilisé la notion d'intervalle de manière fondamentale. Or l'intervalle $]x-r, x+r[$ est l'ensemble des points dont la distance à x est strictement inférieure à r.

Si on pouvait utiliser une notion de distance dans $\mathbb{R}^n$, on pourrait alors recopier quasiment mot pour mot ce que l'on a fait dans $\mathbb{R}$ pour le généraliser à $\mathbb{R}^n$ (dont $\mathbb{R}$ est bien sûr un cas particulier : $\mathbb{R} = \mathbb{R}^1$).

Remarque. « Quasiment » est une précaution importante : à certains endroits, on a utilisé des spécificités de $\mathbb{R}$ qui ne seront plus présentes dans $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$... notamment la *relation d'ordre*, qui est naturelle sur $\mathbb{R}$ et qui n'a pas d'équivalent dans $\mathbb{R}^n$ lorsque $n \geq 2$. Il sera par exemple facile de parler des valeurs d'adhérence d'une suite (u_k) mais il n'y aura plus de sens à parler de plus grande ou plus petite valeur d'adhérence... donc pas de moyen de parler de $\liminf$ et $\limsup$!

Existe-t-il une notion de distance dans $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$,... $\mathbb{R}^n$? Oui, vous connaissez la distance euclidienne qui provient de la norme euclidienne (de même que la distance usuelle sur $\mathbb{R}$ provient de la valeur absolue). On rappelle que si $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, la **norme euclidienne** de x est :

$$\|x\|_2 := \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}$$

Et la distance euclidienne entre deux points $x, y \in \mathbb{R}^n$ est définie par :

$$d_2(x, y) := \|x - y\|_2$$

Pour simplifier l'écriture, nous allons écrire d au lieu de d_2 dans la suite du chapitre.

⚠ Pour $n = 1$, la norme euclidienne est simplement la valeur absolue.

Soient $a \in \mathbb{R}^n$ et r un nombre réel positif ou nul. La **boule ouverte** de centre a et de rayon r est :

$$B(a, r) := \{x \in \mathbb{R}^n \,;\, d(x, a) < r\}$$

et la boule fermée, ou disque, de centre a et de rayon r est :

$$D(a, r) := \{x \in \mathbb{R}^n \,;\, d(x, a) \leq r\}$$

Voisinages, parties ouvertes, intérieur On généralise à « $\mathbb{R}^n$ euclidien » les définitions vues dans $\mathbb{R}$. Si A est une partie de $\mathbb{R}^n$, on dit que :
— A est un **voisinage** du point $a \in \mathbb{R}^n$ s'il existe un réel $r > 0$ tel que $B(a, r) \subseteq A$.
— A est ouvert(e) si A est voisinage de tous ses points, c'est à dire si $\forall a \in A, \exists r > 0 \,;\, B(a, r) \subseteq A$
— L'intérieur de A est l'ensemble $\mathring{A}$ des points dont A est voisinage, autrement dit $\mathring{A} = \{x \in \mathbb{R}^n \,;\, \exists r > 0, B(x, r) \subseteq A\}$.

Exemple 1. 🔧 Les boules ouvertes sont ouvertes !

On démontre de même que : 🔧

— $\emptyset$ et $\mathbb{R}^n$ sont ouverts.
— Une réunion quelconque d'ouverts est ouverte, une intersection finie d'ouverts est ouverte.
— $\mathring{A}$ est le plus grand ouvert de $\mathbb{R}^n$ contenu dans A.

Parties fermées, adhérence Si $A \subseteq \mathbb{R}^n$, on dit que :
— Le point $a \in \mathbb{R}^n$ est **adhérent** à A si $A \cap B(a,r) \neq \emptyset$ quel que soit $r > 0$.
— L'adhérence de A est l'ensemble $\overline{A}$ des points adhérents à A.
— A est fermé(e) si $A = \overline{A}$

Exemple 2. Les boules fermées sont fermées !

On démontre que :
— A est ouverte si et seulement si $\mathbb{R}^n \setminus A$ est fermée.
— $\emptyset$ et $\mathbb{R}^n$ sont fermés.
— Une intersection quelconque de fermés est fermée, une réunion finie de fermés est fermée.
— $\overline{A}$ est le plus petit fermé contenant A.

Convergence des suites Soit (x_k) une suite de points de $\mathbb{R}^n$. On dit que (x_k) **converge** vers le point $a \in \mathbb{R}^n$ si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists K \in \mathbb{N}, \forall k \geq K, \|x_k - a\| < \varepsilon \tag{1.1}$$

La condition $\|x_k - a\| < \varepsilon$ s'écrit aussi $x_k \in B(a, \varepsilon)$. Donc (1.1) revient à dire que la suite entre définitivement dans toute boule ouverte centrée en a. On voit facilement que l'on peut remplacer « boule ouverte centrée en a » par « voisinage de a » : la suite (x_k) converge vers a si et seulement si, pour tout voisinage A de a, il existe un rang $K \in \mathbb{N}$ tel que $x_k \in A$ pour tout $k \geq K$.

Comme dans $\mathbb{R}$, les notions « point adhérent » et « partie fermée » ont une caractérisation séquentielle : si $A \subseteq \mathbb{R}^n$ et $x \in \mathbb{R}^n$, alors :
— x est adhérent à A si et seulement si il existe une suite (a_k) de points de A qui converge vers x
— A est fermée si et seulement la limite de toute suite convergente de points de A appartient à A.

Suites de Cauchy, complétude Une suite (x_k) de points de $\mathbb{R}^n$ est de Cauchy si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists K \in \mathbb{N} ; \forall k, k' \geq K, d(x_k, x_{k'}) < \varepsilon$$

Théorème 3. *$\mathbb{R}^n$ est complet : toute suite de Cauchy est convergente.*

Parties compactes Le cours HLMA412 vous a donné la définition d'une partie compacte A de $\mathbb{R}^n$: « A est compacte si A est fermée et bornée ». Le problème est que ce n'est pas une très bonne définition, au sens où elle ne va pas se généraliser telle quelle aux espaces topologiques généraux ni même aux espaces métriques. Il vaut mieux voir cet énoncé comme un *théorème*, propre à $\mathbb{R}^n$ et plus généralement aux espaces vectoriels normés de dimension finie. En revanche, ce qui était un théorème pour HLMA412 peut devenir une définition acceptable :

Définition 4. Une partie $A \subseteq \mathbb{R}^n$ est **compacte** si toute suite de points de A admet une valeur d'adhérence qui appartient à A, autrement dit si, pour toute suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de points de A il existe un point $a \in A$ et une extractrice ϕ tels que $a_{\phi(n)} \to a$ lorsque $n \to +\infty$.

Théorème. *Une partie A de $\mathbb{R}^n$ est compacte si et seulement si elle est fermée et bornée.*

1.3 Fonctions continues de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$

Voir les chapitres suivants...

2 Espaces métriques

Qu'est-ce qu'une suite convergente ? Vous connaissez déjà la notion de convergence pour les suites de nombres réels : si $(x_0, x_1, \dots, x_n, \dots)$ est une suite réelle, on dit qu'elle converge vers le nombre réel ℓ, qui est alors appelé la limite de la suite, si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}; \forall n \geq N, |x_n - \ell| < \varepsilon \tag{2.1}$$

Dans cette expression, le terme « $|x_n - \ell|$ » s'interprète comme la *distance* entre les nombres x_n et ℓ. L'idée est que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ si la distance entre x_n et ℓ devient arbitrairement petit si n est suffisamment grand, en un sens précis donné par (2.1).

Qu'est-ce qu'une fonction continue ? De même, vous connaissez déjà la notion de continuité pour les fonctions de variable réelle et à valeurs réelles. Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction et $a \in \mathbb{R}$, on dit que f est continue en a si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0; \forall x \in \mathbb{R}, |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon \tag{2.2}$$

Dans cette expression, les termes « $|x - a|$ » et « $|f(x) - f(a)|$ » s'interprètent respectivement comme la distance entre x et a et la distance entre $f(x)$ et $f(a)$. L'idée est que f est continue en a si la distance entre $f(x)$ et $f(a)$ devient arbitrairement petite si la distance entre x et a est suffisamment petite, en un sens précis donné par (2.2).

2.1 Distance

Définition. Une **distance** sur un ensemble X est une fonction $d : X \times X \to \mathbb{R}$ vérifiant, quels que soient $x, y, z \in X$:

1. $d(x, y) \geq 0$, avec égalité si et seulement si $x = y$;
2. $d(x, y) = d(y, x)$;
3. $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.

On dit que $d(x, y)$ est la **distance** entre $x$et y.

La condition 3 de la définition est appelée **inégalité triangulaire**.

Définition. Un **espace métrique** (X, d) est un ensemble X muni d'une distance d.

Exercice. Montrer qu'une distance vérifie la « deuxième inégalité triangulaire » :

$$|d(x, z) - d(z, y)| \leq d(x, y) \qquad \forall x, y, z \in X$$

Exemples

Pour chacun des exemples suivants, il faut savoir montrer que les distances sont bien des distances...

1. Tout ensemble X peut être muni de la **distance discrète**, définie par :

$$d(x,y) := \begin{cases} 0 & \text{si } x = y\,; \\ 1 & \text{si } x \neq y. \end{cases}$$

   Cette distance n'est pas très utile en pratique, mais elle est intéressante pour tester les concepts et l'intuition.

2. L'espace métrique « $\mathbb{R}$ usuel » est l'ensemble $\mathbb{R}$ muni de la distance $d(x,y) := |x-y|$, définie à l'aide de la valeur absolue.
3. De même, l'espace métrique « $\mathbb{C}$ usuel » est l'ensemble $\mathbb{C}$ muni de la distance $d(z,w) := |z-w|$, définie à l'aide du module.
4. L'ensemble $\mathbb{R}^n$ peut être muni de plusieurs distances classiques, en particulier d_∞, d_1 et d_2. En notant $x = (x_1, \dots, x_n)$ et $y = (y_1, \dots, y_n)$, on définit :
   a) $d_\infty(x,y) := \max(|x_1 - y_1|, \dots, |x_n - y_n|)$.
   b) $d_1(x,y) := |x_1 - y_1| + \cdots + |x_n - y_n|$.
   c) $d_2(x,y) := \sqrt{|x_1 - y_1|^2 + \cdots + |x_n - y_n|^2}$ (**distance euclidienne**)
5. Si A est un ensemble quelconque, on considère l'ensemble $\mathcal{B}(A,\mathbb{R})$ de toutes les fonctions de A dans $\mathbb{R}$ qui sont *bornées*. On définit sur $\mathcal{B}(A,\mathbb{R})$ la **distance de la convergence uniforme** par :

$$d_\infty(f,g) := \sup_{a \in A} |f(a) - g(a)|.$$

6. Sur l'ensemble des fonctions continues sur un segment $[a,b]$, on peut définir, en plus de la distance précédente[1] :

$$d_1(f,g) := \int_a^b |f(t) - g(t)|\, dt$$
$$d_2(f,g) := \sqrt{\int_a^b |f(t) - g(t)|^2\, dt}$$

Distance associée à une norme

A l'exception de la distance discrète, les distances qui précèdent proviennent d'une *norme* sur un espace vectoriel. On rappelle que, sur un espace vectoriel E réel (ou complexe), une **norme** est une fonction $N : E \to \mathbb{R}$ vérifiant les conditions suivantes quels que soient $u, v \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ (ou $\lambda \in \mathbb{C}$ pour un espace vectoriel complexe) :

1. $N(u) \geq 0$, avec égalité si et seulement si $u = 0_E$;

1. On rappelle, et on reverra plus loin, qu'une fonction continue sur un segment est bornée.

2. $N(\lambda u) = |\lambda| N(u)$;
3. $N(u+v) \leq N(u) + N(v)$.

Proposition. *Soit N une norme sur l'espace vectoriel E. Alors $d(x,y) := N(x-y)$ définit une distance sur E.*

Démonstration. Vérification directe de la définition de « distance » à partir des propriétés d'une norme. □

Exercice. Définir les normes qui donnent les distances des exemples 2-6.

Certaines normes sont issues d'un produit scalaire. On rappelle qu'un **produit scalaire** sur un espace vectoriel réel est une *forme bilinéaire* $h : E \times E \to \mathbb{R}$ vérifiant, quels que soient $x, y \in E$:

1. $h(x,y) = h(y,x)$;
2. $h(x,x) \geq 0$, avec égalité si et seulement si $x = 0_E$.

On montre qu'un produit scalaire vérifie **l'inégalité de Cauchy-Schwarz** $|h(x,y)| \leq \sqrt{h(x,x)}\sqrt{h(y,y)}$, avec égalité si et seulement si x et y sont colinéaires, ainsi que **l'inégalité de Minkowski** $\sqrt{h(x+y,x+y)} \leq \sqrt{h(x,x)} + \sqrt{h(y,y)}$. On en déduit que $N(x) := \sqrt{h(x,x)}$ définit une norme sur E, et donc une distance.

Exercice. Quels sont les normes de l'exercice précédent qui proviennent d'un produit scalaire ?

Sous-espace métrique : distance induite sur une partie

On considère un espace métrique (X,d) et une partie $A \subseteq X$. On voit immédiatement que la fonction $d_A : A \times A \to \mathbb{R}$ définie par $d_A(x,y) := d(x,y)$ est une distance sur A.

Définition. On dit que d_A est la distance sur A **induite** par la distance d sur X. On dit que (A, d_A) est un **sous-espace métrique** de (X,d).

Cette manière de former un sous-espace d'un espace métrique donné permet d'obtenir une grande variété de nouveaux espaces métriques qui, comme on le verra, peuvent avoir des propriétés très différentes de l'espace dans lequel ils « habitent ». Par exemple, le segment $[0,1]$ hérite de la distance usuelle sur $\mathbb{R}$ et devient un espace métrique, de même que $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, etc.

Exercice. On munit le cercle unité S^1 de $\mathbb{R}^2$ de la distance induite par la distance euclidienne. Quelle est la distance, dans S^1, entre les points $(1,0)$ et $(0,1)$? Et si on prend la distance induite par d_∞ ? La distance induite par d_1 ?

Produit d'espaces métriques

Si (X, d_X) et (Y, d_Y) sont deux espaces métriques, plusieurs distances utiles peuvent être définies sur le produit $X \times Y$, notamment :

$$\begin{aligned}
d_\infty((x,y),(x',y')) &:= \max(d_X(x,x'), d_Y(y,y')) \\
d_1((x,y),(x',y')) &:= d_X(x,x') + d_Y(y,y') \\
d_2((x,y),(x',y')) &:= \sqrt{d_X(x,x')^2 + d_Y(y,y')^2}
\end{aligned}$$

On verra plus loin que ces distances sont « équivalentes » en un certain sens. Plus généralement, on définit de même des distances sur tout produit fini $X_1 \times \cdots \times X_n$ d'espaces métriques ; on remarque notamment que l'on retrouve les trois distances usuelles sur $\mathbb{R}^n = \mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}$ en partant de $\mathbb{R}$ usuel.

d_∞ est bien une distance

1. On a clairement $d_\infty((x,y),(x',y')) \geq 0$. L'égalité si et seulement si $d_X(x,x') = d_Y(y,y') = 0$ donc si et seulement si $x = x'$ et $y = y'$ car d_X et d_Y sont des distances, donc si et seulement si $(x,y) = (x',y')$.
2. La symétrie de d_∞ provient de la symétrie de d_X et d_Y :

$$d_\infty((x,y),(x',y')) = \max(d_X(x,x'),(y,y')) = \max(d_X(x',x), d_Y(y'y)) = d_\infty((x',y'), d_Y(x,y))$$

3. Pour l'inégalité triangulaire, on se donne (x,y), (x',y') et (x'',y'') dans $X \times Y$. Alors $d_X(x,x'') \leq d_X(x,x') + d_X(x',x'') \leq d_\infty((x,y),(x',y')) + d_\infty((x',y'),(x'',y''))$; la première inégalité est l'inégalité triangulaire de d_X, la deuxième inégalité vient de la définition de d_∞ comme maximum. De même, on montre que $d_Y(y,y'') \leq d_\infty((x,y),(x',y')) + d_\infty((x',y'),(x'',y''))$. On en déduit que $d_\infty((x,y),(x'',y'')) = \max(d_X(x,x''), d_Y(y,y'')) \leq d_\infty((x,y),(x',y')) + d_\infty((x',y'),(x'',y''))$.

d_1 est bien une distance

1. Similaire au cas d_∞.
2. Idem.
3. Inégalité triangulaire avec les mêmes notations que pour d_∞ : on a

$$\begin{aligned}
d_1((x,y),(x'',y'')) &= d_X(x,x'') + d_Y(y,y'') \\
&\leq d_X(x,x') + d_X(x',x'') + d_Y(y,y') + d_Y(y',y'') \\
&= d_1((x,y),(x',y')) + d_1((x',y'),(x'',y''))
\end{aligned}$$

d_2 est bien une distance

1. Similaire au cas d_∞.
2. Idem.
3. Inégalité triangulaire :

Distance à une partie

Soit (X, d) un espace métrique. Considérons une partie $A \subseteq X$ et un point $x \in X$. On définit la **distance** de xà A par :

$$d(x, A) := \inf\{d(x, a) \ ; a \in A\}$$

Cet « inf » n'est pas nécessairement réalisé. En particulier, il se peut que la distance de x à A soit nulle sans pour autant que x appartienne à A.

Exercice. Dans $\mathbb{R}$ usuel, déterminer $d(2, [0, 1])$, $d(2, [0, 1[)$, $d(0,]0, 1])$, $d(\sqrt{2}, \mathbb{Q})$.

2.2 Boules

Soit (X, d) un espace métrique.

Définition. Soient $a \in X$ et $r \in \mathbb{R}_+$.
- La **boule ouverte** de centre a et rayon r est $B(a, r) := \{x \in X \mid d(x, a) < r\}$.
- La **boule fermée** de centre a et rayon r est $D(a, r) := \{x \in X \mid d(x, a) \leq r\}$.
- La **sphère** de centre a et rayon r est $S(a, r) := \{x \in X \mid d(x, a) = r\}$.

Il existe d'autres notations pour désigner les boules fermées : $B_f(a, r)$, $B'(a, r)$, $\overline{B}(a, r)$...

Remarque. Pour un rayon nul : $B(a, 0) = \emptyset$ et $D(a, r) = S(a, r) = \{a\}$.

Exemple. Boules des espaces métriques de référence (voir plus haut) :
- $\mathbb{R}$ usuel,
- $\mathbb{R}^n$ muni des distances d_∞, d_1 et d_2,
- X espace métrique discret,
- $\mathcal{B}(A, \mathbb{R})$ muni de la distance de la convergence uniforme,
- $C^0([a, b], \mathbb{R})$ muni des distances d_∞, d_1 et d_2.

Boules d'un sous-espace métrique

Soit $A \subseteq X$, muni de la distance induite d_A . Pour $a \in A$ et $r \in \mathbb{R}_+$, on a une relation simple entre la boule $B_X(a, r)$ de centre a et rayon r vue dans X et la boule $B_A(a, r)$ de même centre et même rayon vue dans A :

$$B_A(a, r) = A \cap B_X(a, r).$$

De même, on a $D_A(a, r) = A \cap D_X(a, r)$ et $S_A(a, r) = A \cap S_X(a, r)$.

Séparation des points

Dans un espace métrique, les boules « séparent les points » au sens suivant :

Proposition. *Soit (X, d) un espace métrique, et soient a, b deux points distincts de X. Alors il existe un réel $r > 0$ tel que $B(a, r) \cap B(b, r) = \emptyset$.*

Démonstration. Comme a et b sont distincts, on a $d(a, b) > 0$. Posons $r := d(a, b)/2$ qui est donc strictement positif. On montre que $B(a, r)$ et $B(b, r)$ sont disjointes en raisonnant par l'absurde : s'il existait un $x \in B(a, r) \cap B(b, r)$, on aurait $d(a, b) \leq d(a, x) + d(x, b) < r + r = 2r = d(a, b)$ d'où $d(a, b) < d(a, b)$ qui est une contradiction. Donc $B(a, r) \cap B(b, r) = \emptyset$ comme voulu. □

Parties bornées, diamètre

Définition. Le diamètre $\mathrm{diam}(A)$ d'une partie $A \subseteq X$ est le nombre (éventuellement $+\infty$) défini par :

$$\mathrm{diam}(A) := \sup\{d(x, y) \mid x, y \in A\}$$

On dit que A est **bornée** si son diamètre est fini, c'est-à-dire s'il existe un réel $M > 0$ tel que $d(x, y) \leq M$ quels que soient $x, y \in A$.

Exemple. Dans un espace métrique quelconque, les boules ouvertes sont bornées. En effet, si $x, y \in B(a, r)$ alors $d(x, y) \leq d(x, a) + d(a, y) < r + r = 2r$, donc $B(a, r)$ est bornée et $\mathrm{diam}(B(a, r)) \leq 2r$. De même pour les boules fermées.

Exemple. Dans un espace métrique discret à plus de deux éléments :

$$\mathrm{diam}(B(a, r)) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq r \leq 1 \\ 1 & \text{si } r > 1 \end{cases}$$

Proposition. *Une partie $A \subseteq X$ est bornée si et seulement si elle est contenue dans une boule, c'est-à-dire s'il existe $x \in X$ et $r > 0$ tels que $A \subseteq B(x, r)$.*

Démonstration. Par double implication.

1. Sens $\Rightarrow$. Si A est bornée et si $a \in A$ (on peut supposer A non vide...), alors $A \subseteq B(a, \mathrm{diam}(A))$.
2. Sens $\Leftarrow$. Si $A \subseteq B(a, r)$ alors $\mathrm{diam}(A) \leq \mathrm{diam}(B(a, r))$, donc $\mathrm{diam}(A) \leq 2r$ et A est bornée.

□

2.3 Convergence des suites, continuité des applications

On se place dans un espace métrique (X, d). On considère des suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de points de X.

Définition. On dit qu'une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **converge** vers $a \in X$ dans (X,d) si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \mid \forall n \geq N, x_n \in B(a,\varepsilon).$$

Proposition. *Une suite convergente dans (X,d) n'a qu'une seule limite.*

Démonstration. Utiliser le fait que les boules séparent les points. □

Cette unicité n'a pas toujours lieu dans un espace topologique général (voir chapitre suivant).

Exemple. Suites convergente d'un espace métrique discret. Suites convergentes dans $\mathcal{B}(A,\mathbb{R})$ pour la distance de la convergence uniforme.

Définition. Soient (X,d_X) et (Y,d_Y) deux espaces métriques, et soit $f : X \to Y$ une application. On dit que f est **continue** au point $a \in X$ si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \mid f(B_X(a,\delta)) \subseteq B_Y(f(a),\varepsilon).$$

On dit que f est **continue** si elle est continue en tout point de X.

Exemple. Les fonctions constantes sont continues en tout point. La fonction identité Id_X est continue en tout point.

Cas particuliers d'applications continues

Définition. Soient (X,d_X) et (Y,d_Y) des espaces métriques, et soit $f : X \to Y$ une application. On dit que :

— f est k**-lipschitzienne** (pour un certain réel $k \geq 0$) si

$$\forall x,x' \in X, d_Y(f(x),f(x')) \leq k d_X(x,x')$$

f est **lipschitzienne** si elle est k-lipschitzienne pour un certain k.

— f est **contractante** (ou encore est une **contraction**) si elle est k-lischitzienne avec $0 \leq k < 1$.

— f **préserve la distance** si

$$\forall x,x' \in X, d_Y(f(x),f(x')) = d_X(x,x')$$

— f est une **isométrie** si elle est bijective et préserve la distance.

Il est clair qu'une application qui préserve la distance est 1-lipschitzienne. Une bijection f est une isométrie si et seulement si f et f^{-1} sont 1-lipschitziennes.

Proposition. *Toute application lipschitzienne est continue.*

Démonstration. Soit $f : X \to Y$ k-lipschitzienne, et soit $a \in X$. Montrons que f est continue en a. Pour cela, soit $\varepsilon > 0$. En prenant $\delta := \varepsilon/k$, on obtient :

$$x \in B(a,\delta) \Rightarrow d_X(x,a) < \delta \Rightarrow d_Y(f(x),f(a)) < k\delta = \varepsilon \Rightarrow f(x) \in B(f(a),\varepsilon)$$

comme voulu. □

Exemple. Distance à un point fixé, à une partie.

Beaucoup d'applications continues ne sont pas lipschitziennes. Par exemple $x \mapsto x^2$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

2.4 Ouverts et fermés d'un espace métrique

Une distance est un outil quantitatif (la distance entre deux points est un nombre, une mesure de l'éloignement) qui nous permet de définir les notions de « convergence d'une suite » et de « continuité d'une application ». Comme on l'a vu, changer de distance modifie en général ces notions de convergence et de continuité. Par exemple, une suite qui converge pour une certaine distance peut ne pas converger pour une distance différente, ou peut converger vers une autre limite. Mais, pour une distance donnée, à quel point les notions de convergence et continuité qui lui sont attachées dépendent-elles de *cette distance* particulière ? D'autres distances pourraient-elles donner les mêmes notions de convergence et continuité ? Peut-on exprimer ces notions sans faire référence à une distance particulière ?

Les ouverts d'un espace métrique (X, d) sont des parties de X qui, en un certain sens, généralisent les boules ouvertes :
— toute boule ouverte de X est un ouvert de X, mais il y a beaucoup plus d'ouverts que de boules ouvertes ;
— la convergence des suite et la continuité des applications peuvent être définies à l'aide des ouverts ;
— des distances différentes peuvent posséder les mêmes ouverts, et donc donner les mêmes notions de convergence et continuité.

2.4.1 Ouverts

Soit (X, d) un espace métrique.

Définition. Une partie $U \subseteq X$ est **ouverte** (on dit aussi que U est un **ouvert** de X) si tout point de U est le centre d'une boule ouverte contenue dans U :

$$\forall x \in U, \exists r > 0 \mid B(x, r) \subseteq U.$$

Exemple. Dans $\mathbb{R}$ usuel : les intervalles ouverts sont ouverts, l'intervalle $[0, 1[$ n'est pas ouvert. Dans $\mathbb{R}^2$ euclidien, le « demi-plan ouvert » $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ est ouvert. Dans un espace discret, toute partie est ouverte.

Proposition. *Les boules ouvertes de (X, d) sont ouvertes.*

Démonstration. Soit $a \in X$ et soit $r > 0$. Pour montrer que $B(a, r)$ est ouverte, on revient à la définition : on considère un $x \in B(a, r)$ quelconque, et on construit, à l'aide du fait que $d(x, a) > r$ et en utilisant l'inégalité triangulaire, un nombre $\varepsilon > 0$ assez petit pour que $B(x, \varepsilon) \subseteq B(a, r)$. □

Proposition. *Tout ouvert non vide de (X, d) est réunion de boules ouvertes.*

Démonstration. Soit U un tel ouvert. Pour chaque $x \in U$, choisir un nombre $r_x > 0$ tel que $B(x, r_x) \subseteq U$. Alors $U = \bigcup_{x \in X} B(x, r_x)$. □

Proposition. *Soit (X, d) un espace métrique. L'ensemble de ses ouverts possède les propriétés suivantes :*

1. *X et $\emptyset$ sont ouverts.*
2. *Si $(U_i)_{i\in I}$ est une famille quelconque d'ouverts, alors la réunion $\bigcup_{i\in I} U_i$ est un ouvert.*
3. *Si $U_1, \ldots, U_n$ est une famille finie d'ouverts, alors l'intersection $U_1 \cap \cdots \cap U_n$ est un ouvert.*

⚠ Pour se convaincre de l'importance de l'hypothèse « famille finie », considérer la famille des intervalles $]-1+1/n, 1-1/n[$ dans $\mathbb{R}$ usuel.

Démonstration. Vérification directe, ensembliste, à partir de la définition de « ouvert ». □

Théorème. *Tout ouvert non vide de $\mathbb{R}$ usuel est réunion finie ou dénombrable d'intervalles ouverts deux à deux disjoints.*

Démonstration. Soit U un ouvert non vide de $\mathbb{R}$. Pour chaque $x \in U$, on note $]m_x, M_x[$ le plus grand intervalle ouvert contenant x et contenu dans U. ⚠ Il faut *prouver* qu'un tel intervalle existe et est unique ! Pour cela, démontrer que c'est la réunion de tous les intervalles ouverts contenant x et contenus dans U : on montre que cette réunion est un intervalle, qu'elle est ouverte, qu'elle contient x, etc. On voit ensuite facilement que les intervalles $]m_x, M_x[$ sont soit égaux soit disjoints deux à deux. On peut alors choisir une famille $(x_i)_{i\in I}$ de nombres $x_i \in U$ telle que les intervalles $]m_i, M_i[$ soient deux à deux disjoints. On montre que l'ensemble d'indices I est fini ou dénombrable, en montrant qu'il s'injecte dans $\mathbb{Q}$: il suffit pour cela de choisir un rationnel r_i dans $]m_i, M_i[$. □

2.4.2 Fermés

Soit (X, d) un espace métrique.

Définition. Une partie $F \subseteq X$ est **fermée** (on dit aussi que c'est un **fermé** de X) si $X \setminus F$ est ouverte.

Exemple. Dans $\mathbb{R}$ usuel, l'intervalle $[0, 1]$ est fermé, l'intervalle $[0, 1[$ n'est pas fermé. Dans un espace discret, toute partie est fermée.

Proposition. *Les boules fermées et les sphères de (X, d) sont fermées.*

Démonstration. Soit $a \in X$ et $r > 0$.

— On montre que $D(a, r)$ est fermé en montrant que $X \setminus D(a, r) = \{x \in X \mid d(a, x) > r\}$ est ouvert. Pour cela, soit $x \in X$ tel que $d(a, x) > r$. On montre alors que $B(x, d(a, x) - r) \subseteq X \setminus D(a, r)$ en utilisant l'inégalité triangulaire.

— On montre que $S(a, r)$ est fermée en observant que son complémentaire est la réunion de deux ouverts.

□

Proposition. *Soit (X, d) un espace métrique. L'ensemble de ses fermés possède les propriétés suivantes :*

1. *X et $\emptyset$ sont fermés.*
2. *Si $(F_i)_{i\in I}$ est une famille quelconque d'ouverts, alors l'intersection $\bigcap_{i\in I} F_i$ est un fermé.*
3. *Si $F_1, \dots, F_n$ est une famille finie de fermés, alors la réunion $F_1 \cup \dots \cup F_n$ est un fermé.*

Pour se convaincre de l'importance de l'hypothèse « famille finie », considérer la famille des intervalles $[-1 + 1/n, 1 - 1/n]$ dans $\mathbb{R}$ usuel.

Démonstration. Par passage au complémentaire et application du résultat correspondant sur les ouverts (voir plus haut), en se servant des égalités ensemblistes $X \setminus (\bigcup_i A_i) = \bigcap_i (X \setminus A_i)$ et $X \setminus (\bigcap_i A_i) = \bigcup_i (X \setminus A_i)$. □

Exemple. Un cas particulier important : dans un espace métrique, les singletons sont fermés (ce sont des boules fermées...), et par conséquent toute partie finie est fermée.

2.4.3 Convergence et continuité en termes d'ouverts

Proposition. *Soit (X, d) un espace métrique, et soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de points de X. Alors $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $a \in X$ si et seulement si : pour tout ouvert contenant a, il existe un $N \in \mathbb{N}$ tel que $x_n \in U$ pour tout $n \geq N$.*

Autrement dit, on peut remplacer « toute boule ouverte centrée en a » par « tout ouvert contenant a » dans la définition de la convergence d'une suite vers $a \in X$.

Démonstration. Par double implication.

— Pour le sens $\Leftarrow$: les boules sont des ouverts particuliers.

— Pour le sens $\Rightarrow$, soit U un ouvert contenant x. Il existe donc un $r > 0$ tel que $B(a, r) \subseteq U$, d'où un $N \in \mathbb{N}$ tel que $x_n \in B(a, r)$ pour tout $n \geq N$, et donc $x_n \in U$ pour tout $n \geq N$.

□

Proposition. *Soient (X, d_X) et (Y, d_Y) des espaces métriques, et soit $f : X \to Y$ une application. Alors f est continue en $a \in X$ si et seulement si : pour tout ouvert V de Y contenant $f(a)$, il existe un ouvert U de X contenant a tel que $f(U) \subseteq V$.*

Autrement dit, on peut remplacer « toute boule ouverte centrée en $f(a)$ » par « tout ouvert contenant $f(a)$ » et « il existe une boule ouverte centrée en a » par « il existe un ouvert contenant a » dans la définition de la continuité d'une application en $a \in X$.

Démonstration. Par double implication.

— Pour le sens $\Leftarrow$, soit $\varepsilon > 0$. Alors $B_Y(f(a), \varepsilon)$ est un ouvert de Y, il existe donc un ouvert U de X tel que $x \in U$ et $f(U) \subseteq B_Y(f(a), \varepsilon)$. Soit $\delta > 0$ tel que $B_X(a, \delta) \subseteq U$. Alors $f(B_X(a, \delta)) \subseteq f(U) \subseteq B_Y(f(a), \varepsilon)$. Donc f est continue en a.
— Pour le sens $\Rightarrow$, soit V un ouvert de Y tel que $f(a) \in V$. D'où un $\varepsilon > 0$ tel que $B_Y(f(a), \varepsilon) \subseteq V$, puis un $\delta > 0$ tel que $f(B_X(a, \delta)) \subseteq B_Y(f(a), \varepsilon)$. On a bien trouvé un ouvert Ude X contenant a, à savoir $U := B_X(a, \delta)$, tel que $f(U) \subseteq V$.

□

2.5 Distances équivalentes

Puisque la convergence des suites et la continuité des applications peuvent s'exprimer en référence aux ouverts exclusivement, on se demande si des distances différentes peuvent avoir les mêmes ouverts. C'est effectivement le cas, parfois avec des distances très différentes l'une de l'autre.

Définition. Soit X un ensemble, et soient d_1, d_2 deux distances sur X.
— On dit que d_1 et d_2 sont **topologiquement équivalentes** si elles définissent les mêmes ouverts.
— On dit que d_1 et d_2 sont **fortement équivalentes**, ou **équivalentes** tout court, s'il existe des constantes $\alpha > 0$ et $\beta > 0$ telles que

$$\forall x, y \in X, \quad \alpha d_1(x, y) \leq d_2(x, y) \leq \beta d_1(x, y). \tag{2.3}$$

⚠ Terminologie pas stabilisée.

Note. Deux normes N_1 et N_2 sur un espace vectoriel E sont **équivalentes** s'il existe des constantes $\alpha > 0$ et $\beta > 0$ telles que

$$\forall u \in E, \quad \alpha N_1(u) \leq N_2(u) \leq \beta N_1(u).$$

Les distances associées à des normes équivalentes sont donc (fortement) équivalentes.

Proposition. *Si d_1 et d_2 sont fortement équivalentes, alors elles sont topologiquement équivalentes.*

Démonstration. On suppose qu'il existe des constantes α et β vérifiant (2.3). Il s'agit de montrer que tout d_1-ouvert est aussi un d_2-ouvert, et réciproquement.
— Soit $U \subseteq X$ un d_1-ouvert non vide (s'il est vide, c'est évidemment aussi un d_2-ouvert). Soit $a \in U$. On écrit qu'il existe une petite d_1-boule centrée en a et contenue dans U. A l'aide de l'une des inégalités de « fortement équivalentes », on en déduit qu'il existe une petite d_2-boule centrée en a et contenue dans U. Donc U est bien un d_2-ouvert.
— Réciproquement, par le même type de raisonnement et à l'aide de l'autre inégalité de (2.3), on montre qu'un d_2-ouvert (que l'on peut supposer non vide) est aussi forcément un d_1-ouvert.

□

Exemple.

- Les trois distances usuelles d_∞, d_1, d_2 sur $\mathbb{R}^n$ sont fortement équivalentes (elles proviennent de normes équivalentes). On vérifie facilement que $d_\infty \leq d_2 \leq d_1 \leq n d_\infty$ (le voir directement sur les normes).
- Les trois distances usuelles sur le produit de deux espaces métriques (voir plus haut) sont fortement équivalentes : on a $d_\infty \leq d_2 \leq d_1 \leq 2d_\infty$.
- Sur $E = C^0([0,1], \mathbb{R})$, les distances d_∞ et d_1 ne sont pas topologiquement équivalentes : on montre par exemple que la d_∞-boule $B_{d_\infty}(0_E, 1)$ n'est pas ouverte pour d_1. Voir feuille TD1.
- Toute distance d sur X est topologiquement équivalente à une distance *bornée*. Par exemple, $\delta(x,y) := \min(1, d(x,y))$ définit une distance sur X, topologiquement équivalente à d. Voir feuille TD1.

3 Espaces topologiques

Ce que nous avons vu dans le chapitre précédent :

— la notion de distance permet de définir la convergence des suites et la continuité des applications, en généralisant ce que l'on connaît déjà pour les suites réelles et les fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$;

— le vocabulaire des boules ouvertes permet de reformuler ces définitions de manière ensembliste ;

— on peut à nouveau reformuler ces définitions en utilisant les ouverts de l'espace métrique, qui généralisent les boules ouvertes ;

— des distances différentes peuvent posséder les mêmes ouverts.

L'étape suivante est de considérer que les ouverts sont, dans de nombreux cas, plus importants que la distance. Dans la définition d'un *espace topologique*, on oublie la distance (parfois il n'y en aura pas) et on ne garde que les ouverts. On arrive à une situation plus abstraite, car plus qualitative : les ouverts sont des parties de l'espace topologique dans lequel on se situe, les définitions seront donc purement ensemblistes et il n'y aura pas d'outil tel que la distance pour « mesurer » l'éloignement entre les points.

Quel bénéfice en tirer ?

— Certains espaces toplogiques ne sont pas métrisables : il n'existe pas de distance qui définisse les ouverts. La « topologie générale » est donc plus générale que la « topologie des espaces métriques ».

— Certains espace topologiques sont bien métrisables, mais aucune distance naturelle ne s'impose pour parler de leurs ouverts.

— Dans de nombreuses situations, ne raisonner que sur les ouverts permet une meilleure compréhension (meilleure = plus simple, plus générale).

— Néanmoins, lorsque l'espace de travail est un espace métrique, il y a aussi ded cas où l'utilisation de la distance est plus intuitif et plus simple.

3.1 Topologie sur un ensemble

Définition. Soit X un ensemble. Une **topologie** sur X est un ensemble $\mathcal{O}$ de parties de X, appelées **ouverts** de la topologie, vérifiant les conditions suivantes :

1. $\emptyset$ et X appartiennent à $\mathcal{O}$.
2. Si $(U_i)_{i\in I}$ est une famille quelconque d'éléments de $\mathcal{O}$, alors $\bigcup_{i\in I} U_i$ appartient à $\mathcal{O}$.
3. Si $U_1, \dots, U_n$ est une famille finie d'éléments de $\mathcal{O}$, alors $U_1 \cap \dots \cap U_n$ appartient à $\mathcal{O}$.

Un **espace topologique** $(X, \mathcal{O})$ est un ensemble X muni d'une topologie $\mathcal{O}$.

Bien noter la différence entre « réunion quelconque » et « intersection finie ».

Exemple.

— Une distance d sur X définit une topologie sur X (voir chapitre précédent).

— La **topologie grossière** sur X est $\mathcal{O} = \{\emptyset, X\}$. C'est la topologie sur X qui contient le moins d'ouverts possible.

— La **topologie discrète** sur X est $\mathcal{O} = \mathcal{P}(X)$. C'est la topologie sur X qui contient le plus d'ouverts possible. On a vu (chapitre précédent) que c'est la topologie de la distance discrète.

— L'**espace de Sierpinski** est donné par $X = \{a, b\}$ et $\mathcal{O} = \{\{a, b\}, \{a\}, \emptyset\}$.

Dans la suite du cours, on s'intéresse principalement aux espaces métriques. Une notion ou une propriété peut être de nature *topologique*, au sens où elle ne dépend que des ouverts et non de la distance, ou bien de nature *métrique* au sens où elle dépend fondamentalement de la distance.

Fermés d'un espace topologique

Se donner les ouverts pour définir une topologie revient à se donner leurs complémentaires : les fermés.

Définition. Soit $(\mathcal{O}, X)$ un espace topologique. Une partie $F \subseteq X$ est **fermée** (pour la topologie) si $X \setminus F$ est un ouvert.

Exemple. $[0, 1]$ est fermé dans $\mathbb{R}$ mais $[0, 1[$ ne l'est pas. Dans un espace discret, toutes les parties sont fermées.

Proposition. *L'ensemble des fermés d'un espace topologique vérifie :*

1. *$\emptyset$ et X sont fermés*
2. *une intersection quelconque de fermés est fermée.*
3. *Une réunion finie de fermés est fermée.*

Démonstration. Par passage au complémentaire des propriétés analogues des ouverts. □

Espaces métrisables. Espaces séparés

On dit qu'un espace topologique est **métrisable** s'il existe une distance qui induise la topologie donnée. Est-ce que tout espace topologique est métrisable ? Non, car les espaces métrisables ont des propriétés particulières : par exemple ils sont séparés.

Définition. Un espace topologique est **séparé** si quels que soient $a, b \in X$ distincts, il existe un ouvert U contenant a et un ouvert V contenant b tels que $U \cap V = \emptyset$.

Proposition. *Tout espace métrique est séparé.*

Démonstration. Déjà vu (chapitre précédent). □

L'espace de Sierpinski n'est pas séparé : tout ouvert qui contient b contient aussi a. Un ensemble à au moins 2 points, muni de la topologie grossière, n'est pas séparé : l'ensemble tout entier est le seul ouvert non vide.

Voisinages

Un ouvert est une partie qui « entoure » chacun de ses points. Parfois on ne s'intéresse qu'aux parties qui « entourent » un point donné, d'où la notion de voisinage.

Définition. Soient $(X, \mathcal{O})$ un espace topologique et $x \in X$. Une partie $V \subseteq X$...

1. ... est un **voisinage** de x s'il existe un ouvert $U \in \mathcal{O}$ tel que $x \in U \subseteq V$.
2. ... est un **voisinage ouvert** de x si V est ouvert et contient x.

On note $\mathcal{V}(x)$ ou $\mathcal{V}_X(x)$ l'ensemble des voisinages (pas nécessairement ouverts) de x dans X.

Plus généralement, on dit que $V \subseteq X$ est un voisinage d'une partie $A \subseteq X$ s'il existe un ouvert U tel que $A \subseteq U \subseteq V$.

⚠ Dans un espace métrique (X, d) : A est un voisinage de x si et seulement si il existe $r > 0$ tel que $B(a, r) \subseteq A$.

Exemple. Dans $\mathbb{R}$ usuel, l'intervalle $[0, 1]$ est un voisinage de $1/2$, mais n'est pas un voisinage de 0 ni de 1.

Proposition. *Une partie $A \subseteq X$ est ouverte si et seulement si A est voisinage de chacun de ses points.*

Démonstration.

1. Sens $\Rightarrow$. Si A est ouvert, alors A est évidemment voisinage (ouvert) de chacun de ses points.
2. Sens $\Leftarrow$. On suppose A voisinage de tous ses points. Pour chaque $x \in A$, il existe donc un ouvert U_x tel que $x \in U_x \subseteq A$. On a alors $A = \bigcup_{x \in A} U_x$, d'où A est ouvert en tant que réunion d'ouverts.

□

Suites convergentes, applications continues

Les ouverts servent à définir la convergence des suites et la continuité des applications.

Définition. Soit $(X, \mathcal{O})$ un espace topologique. Une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de points de X **converge** vers le point $a \in X$ si : pour tout ouvert U contenant x, il existe un rang $N \in \mathbb{N}$, tel que $x_n \in U$ pour tout $n \geq N$.

Définition. Soient $(X, \mathcal{O}_X)$ et $(Y, \mathcal{O}_Y)$ des espaces topologiques, soit $f : X \to Y$ une application.

1. f est **continue** au point $a \in X$ si : pour tout ouvert V de Y contenant $f(a)$, il existe un ouvert U de X contenant a, tel que $f(U) \subseteq V$.
2. f est **continue** sur X si elle est continue en tout point de X.

Proposition. *On a les équivalences :*

$$\begin{aligned} f \textit{ est continue sur } X &\Leftrightarrow \textit{pour tout ouvert } V \textit{ de } Y,\ f^{-1}(V) \textit{ est ouvert dans } X \\ &\Leftrightarrow \textit{pour tout fermé } G \textit{ de } Y,\ f^{-1}(G) \textit{ est fermé dans } X \end{aligned}$$

Très utile pour montrer que certaines parties sont ouvertes, ou fermées.

Démonstration.

1. Première équivalence : par double implication.
   a) Sens $\Rightarrow$. On suppose f continue sur X. Soit V un ouvert de Y. Si $f^{-1}(V)$ est vide, c'est un ouvert de X. Sinon, soit $x \in f^{-1}(V)$. Comme f est continue en x et que V est un ouvert de Y contenant $f(x)$, il existe un ouvert U de X contenant x tel que $f(U) \subseteq V$. Alors $U \subseteq f^{-1}(V)$. Donc $f^{-1}(V)$ est voisinage de n'importe lequel de ses points x. Donc $f^{-1}(V)$ est ouvert.
   b) Sens $\Leftarrow$. On suppose que l'image réciproque de tout ouvert est ouverte. Montrons que f est continue en tout point $x \in X$. Pour cela, soit V un ouvert de Y contenant $f(x)$. Par hypothèse, $U := f^{-1}(V)$ est un ouvert de X. Clairement $x \in U$ et $f(U) = f(f^{-1}(V)) \subseteq V$. Donc f est continue en x.
2. Deuxième équivalence : par passage aux complémentaires.
   a) Sens $\Rightarrow$. On suppose que l'image réciproque de tout ouvert est ouverte, et on se donne un fermé G de Y. Alors $Y \setminus G$ est un ouvert de Y, donc $f^{-1}(Y \setminus G)$ est un ouvert de X, or $f^{-1}(Y \setminus G) = X \setminus f^{-1}(G)$, donc $f^{-1}(G)$ est un fermé de X.
   b) Sens $\Leftarrow$. Même idée.

$\square$

On peut reformuler les définitions en termes de voisinages :

Exercice 5.

1. Montrer que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **converge** vers a si et seulement si :

$$\forall V \in \mathcal{V}_X(a), \exists N \in \mathbb{N}\,;\, \forall n \geq N, x_n \in V$$

2. Montrer que f est continue en a si et seulement si

$$\forall V \in \mathcal{V}_Y(f(a)), f^{-1}(V) \in \mathcal{V}_X(a)$$

⚠ Bien sûr, si on change de topologie alors on change la notion d'ouvert et de voisinage et donc on change possiblement les notions de limite et continuité.

3.2 Topologie induite sur une partie

Soit $(X, \mathcal{O}_X)$ un espace topologique, et soit $A \subseteq X$. Pour chaque ouvert U de X, on considère l'intersection $U \cap A$: c'est la « trace » de U sur A. On vérifie facilement que la famille

$$\mathcal{O}_A := \{A \cap U\,;\, U \in \mathcal{O}_X\} \tag{3.1}$$

est une topologie sur A :

1. $A = A \cap X$ et $X \in \mathcal{O}$, donc $A \in \mathcal{O}_A$. De même, $\emptyset = A \cap \emptyset$ et $\emptyset \in \mathcal{O}$, donc $\emptyset \in \mathcal{O}_A$.
2. Si $(V_i)_{i \in I}$ est une famille d'ouverts de A, on peut trouver pour chaque $i \in I$ un $U_i \in \mathcal{O}$ tel que $V_i = A \cap U_i$, d'où $\bigcup_{i \in I} V_i = \bigcup_{i \in I} A \cap U_i = A \cap \bigcup_{i \in I} U_i$. Or $\bigcup_{i \in I} U_i \in \mathcal{O}$, donc $\bigcup_{i \in I} V_i \in \mathcal{O}_A$.
3. De même pour une intersection finie, en utilisant $\bigcup_{i=1}^n A \cap U_i = A \cap (\bigcup_{i=1}^n U_i)$.

Définition. On dit que $\mathcal{O}_A$ est la **topologie induite** sur A par la topologie $\mathcal{O}_X$ de X.

Attention, si $B \subseteq A \subseteq X$, alors B « vit » dans deux espaces topologiques différents : dans $(X, \mathcal{O}_X)$ et dans $(A, \mathcal{O}_A)$. Certaines propriétés topologiques sont « relatives », c'est à dire qu'elles dépendent de l'espace topologique dans lequel on les considère. Par exemple, « être ouvert » est une propriété relative : il se peut que B soit ouverte dans A mais pas dans X. De même pour « être fermé ».

Exercice. $[0, 1[$ n'est pas ouvert dans $\mathbb{R}$ usuel, mais est ouvert dans $[0, +\infty[$ muni de la topologie induite.

Cas d'un espace métrique Dans le cas d'un espace métrique (X, d) et une partie $A \subseteq X$, on obtient a priori deux topologies sur A : d'une part on peut munir A de la distance induite d_A et obtenir la topologie de l'espace métrique (X, d_A), d'autre part on peut considérer la topologie $\mathcal{O}_X$ de l'espace métrique (X, d_X) et obtenir la topologie induite $\mathcal{O}_A$ sur A.

Proposition. *(avec les notations qui précèdent) La topologie de l'espace métrique (A, d_A) coïncide avec la topologie induite $\mathcal{O}_A$.*

Démonstration. Il s'agit de montrer que tout ouvert U de A pour la distance d_A est de la forme $U = A \cap V$ avec V ouvert de X, et réciproquement.

— Sens $\Rightarrow$. Soit U un ouvert de A pour la distance d_A, supposé non vide sinon c'est évident. Pour chaque $x \in A$, on choisit un $r_x > 0$ tel que $B_A(x, r_x) \subseteq U$. Comme on l'a déjà vu, on a donc $U = \bigcup_{x \in U} B_A(x, r_x)$. Or on sait que $B_A(x, r_x) = A \cap B_X(x, r_x)$. Donc $U = \bigcup_{x \in U}(A \cap B_X(x, r_x)) = A \cap (\bigcup_{x \in A} B_X(x, r_x))$. L'ensemble $V := \bigcup_{x \in A} B_X(x, r_x)$ est un ouvert de X, qui convient donc.

— Sens $\Leftarrow$: Soit V un ouvert de X, il s'agit alors de montrer que $U := A \cap V$ est un ouvert pour la distance d_A. C'est évident si U est vide, donc on peut supposer $U \neq \emptyset$. Pour chaque $x \in U$ il existe un $r_x > 0$ tel que $B_X(x, r_x) \subseteq V$ puisque V est ouvert pour d_X. Mais alors $B_A(x, r_x) = A \cap B_X(x, r_x)$ est contenue dans $U = A \cap V$. Donc U est bien ouvert pour d_A.

$\square$

3.3 Base d'une topologie, topologie produit

Dans un espace métrique (X, d), les boules ouvertes jouent un rôle spécial : tout ouvert est réunion de boules ouvertes. C'est pour cette raison que la convergence et la continuité peuvent s'exprimer avec les boules ouvertes (en réalité c'est ainsi que nous les avons d'abord définies). Dans un espace topologique général $(X, \mathcal{O})$, il peut être pratique de disposer ainsi d'ouverts « de base » qui permettent de retrouver tous les ouverts.

Définition. Soit $(X, \mathcal{O})$ un espace topologique. Une **base** de $\mathcal{O}$ est une partie $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{O}$ telle que tout ouvert non vide $U \in \mathcal{O}$ est réunion d'ouverts appartenant à $\mathcal{B}$.

Exemple. $\mathcal{B} := \{B(x, r)\,;\, x \in X, r \in \mathbb{R}_+^*\}$ est une base de la topologie d'un espace métrique (X, d).

Parfois on cherche à *définir* la topologie à partir d'ouverts « de base ». C'est précisément ce que l'on a fait dans le chapitre sur les espaces métriques : on disposait d'abord des boules ouvertes, et c'est à partir des ces ouverts particuliers que l'on a défini les ouverts généraux de l'espace métrique.

Le résultat suivant caractérise les ensembles $\mathcal{B}$ qui sont base d'une topologie sur X :

Proposition. *Soit X un ensemble, et soit $\mathcal{B}$ un ensemble de parties de X vérifiant les deux conditions :*

1. *pour tout $x \in X$, il existe $B \in \mathcal{B}$ tel que $x \in B$;*
2. *quels que soient $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ et quel que soit $x \in B_1 \cap B_2$, il existe $B \in \mathcal{B}$ tel que $x \in B$ et $B \subseteq B_1 \cap B_2$.*

Alors $\mathcal{B}$ est une base d'une topologie $\mathcal{O}$ sur X.

La première condition dit que X est réunion des éléments de $\mathcal{B}$. La deuxième condition dit que l'intersection de deux éléments de $\mathcal{B}$ est réunion d'éléments de $\mathcal{B}$.

Démonstration. Par définition, il faut définir $\mathcal{O}$ comme l'ensemble constitué de l'ensemble vide et de toutes les parties de X qui sont réunion d'éléments de $\mathcal{B}$. Toute la question est de savoir si cela définit effectivement une topologie sur X.

1. L'ensemble vide appartient à $\mathcal{O}$ par hypothèse, de même que X d'après la condition 1.
2. Si $(U_i)_{i \in I}$ est une famille d'éléments de $\mathcal{O}$, alors chaque U_i est réunion d'éléments de $\mathcal{B}$, donc la réunion de tous les U_i l'est aussi. Donc $\cup_{i \in I} U_i$ appartient à $\mathcal{O}$.
3. Pour la stabilité par intersection finie, il suffit de le montrer pour deux éléments. Soient donc $U, V \in \mathcal{O}$. Par définition, il existe des familles $(B_i)_{i \in I}$ et $(C_j)_{j \in J}$ d'éléments de $\mathcal{B}$ telles que $U = \cup_{i \in I} B_i$ et $V = \cup_{j \in J} C_j$. Alors $U \cap V = (\cup_{i \in I} B_i) \cap (\cup_{j \in J} C_j) = \cup_{i \in I, j \in J} (B_i \cap C_j)$ de manière purement ensembliste. Or d'après la condition 2, chaque $B_i \cap C_j$ est réunion d'éléments de $\mathcal{B}$, donc $U \cap V$ est réunion de réunions d'éléments de $\mathcal{B}$, donc réunion d'éléments de $\mathcal{B}$, donc appartient à $\mathcal{O}$.

$\square$

La convergence et la continuité peuvent s'exprimer en termes d'ouverts de base :

Proposition. *Soit* $(X, \mathcal{O})$ *un espace topologique. Soit* $\mathcal{B}$ *une base de* $\mathcal{O}$*. Une suite* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *de points de* X *converge vers* $x \in X$ *si et seulement si pour tout ouvert de base* $U \in \mathcal{B}$ *contenant* x*, il existe* $N \in \mathbb{N}$ *tel que* $x_n \in U$ *pour tout* $n \geq N$*.*

Démonstration. Le sens $\Rightarrow$ est évident : un ouvert de base est un ouvert particulier. Pour le sens $\Leftarrow$: en supposant la propriété vraie pour tout ouvert de base, si U est un ouvert contenant x, alors il existe un ouvert de base B tel que $x \in B \subseteq U$, d'où un $N \in \mathbb{N}$ tel que $x_n \in B$ pour tout $n \geq N$, d'où $x_n \in U$ pour tout $n \geq N$. □

Proposition. *Soient* $(X, \mathcal{O}_X)$ *et* $(Y, \mathcal{O}_Y)$ *des espaces topologiques. Soit* $\mathcal{B}_Y$ *une base de* $\mathcal{O}_Y$*. Une application* $f : X \to Y$ *est continue au point* $x \in X$ *si et seulement si pour tout ouvert de base* $V \in \mathcal{B}_Y$ *l'image réciproque* $f^{-1}(V)$ *est un ouvert de* X*.*

Attention, on ne dit pas que $f^{-1}(V)$ doit être un ouvert de base de X ! Penser aux espaces métriques : l'image réciproque d'une boule ouverte par une application continue n'a pas de raison d'être une boule ouverte...

Démonstration. Le sens $\Rightarrow$ est évident : un ouvert de base est un ouvert particulier. Pour le sens $\Leftarrow$, en supposant la propriété vraie pour les ouverts de base, soit V un ouvert quelconque de Y, on montre que $f^{-1}(V)$ est ouvert :

1. si $f^{-1}(V) = \emptyset$ c'est fini.
2. sinon, pour tout $x \in f^{-1}(V)$, on a $f(x) \in V$ donc il existe un ouvert de base $B \in \mathcal{B}_Y$ tel que $f(x) \in B \subseteq V$. Alors $x \in f^{-1}(B) \subseteq f^{-1}(V)$ de manière ensembliste, et donc x appartient à l'intérieur de $f^{-1}(V)$ car $f^{-1}(B)$ est ouvert par hypothèse. Ceci étant vrai pour tout $x \in f^{-1}(V)$, on en déduit que $f^{-1}(V)$ est ouvert.

□

Topologie produit (produit fini)

On se donne un nombre fini d'espaces topologiques $(X_1, \mathcal{O}_1), \ldots, (X_n, \mathcal{O}_n)$ et on aimerait définir une topologie naturelle sur le produit $X_1 \times \cdots \times X_n$. « Naturelle » en quel sens ? Par exemple on voudrait que les projections $\pi_i : X_1 \times \cdots \times X_n \to X_i$ soient continues. Mais cette condition impose à elle seule la topologie candidate $\mathcal{O}$ sur $X_1 \times \cdots \times X_n$: si toutes les projections π_i sont continues, alors quels que soient $U_1 \in \mathcal{O}_1, \ldots, U_n \in \mathcal{O}_n$ on doit avoir ${\pi_1}^{-1}(U_1) \in \mathcal{O}, \ldots, {\pi_n}^{-1}(U_n) \in \mathcal{O}$ et par suite $U_1 \times \cdots \times U_n = {\pi_1}^{-1}(U_1) \cap \cdots \cap {\pi_n}^{-1}(U_n)$ soit appartenir aussi à $\mathcal{O}$. Le résultat suivant nous dit que cette condition détermine totalement $\mathcal{O}$:

Proposition. $\mathcal{B} := \{U_1 \times \cdots \times U_n\,;\, U_1 \in \mathcal{O}_1, \ldots, U_n \in \mathcal{O}_n\}$ *est une base de topologie sur* $X_1 \times \cdots \times X_n$*.*

Démonstration. On utilise la caractérisation démontrée plus haut :

1. $X_1 \times \cdots \times X_n$ est un élément de $\mathcal{B}$;

2. l'intersection de deux éléments de $\mathcal{B}$ est un élément de $\mathcal{B}$:
$$(U_1 \times \cdots \times U_n) \cap (V_1 \times \cdots \times V_n) = (U_1 \cap V_1) \times \cdots \times (U_n \cap V_n)$$

□

Définition. La **topologie produit** sur $X_1 \times \cdots \times X_n$ est la topologie engendrée par $\mathcal{B}$.

Les éléments de $\mathcal{B}$ sont parfois appelés **ouverts élémentaires**.

Proposition. *On munit $X_1 \times \cdots \times X_n$ de la topologie produit. Alors les projections $\pi_i : X_1 \times \cdots \times X_n \to X_i$ sont continues.*

Démonstration. Si $U_i \in \mathcal{O}_i$, alors ${\pi_i}^{-1}(U_i) = X_1 \times \cdots \times X_{i-1} \times U_i \times X_{i+1} \times \cdots \times X_n$ qui est est un ouvert élémentaire. □

La topologie produit est « la plus petite » topologie qui rende toutes les projections continues, où « la plus petite » signifie « avec le moins d'ouverts possible » : voir le début de la section .

Cas des espaces métriques Pour simplifier, traitons le cas du produit de deux espaces métriques (X, d_X) et (Y, d_Y). On a défini au chapitre précédent trois distances d_∞, d_1 et d_2 sur $X \times Y$ à partir de d_X et d_Y. Ces trois distances sont (fortement) équivalentes, par conséquent elles définissent la même topologie. D'autre part on dispose de la topologie produit pour les topologies $\mathcal{O}_X$ et $\mathcal{O}_Y$ associées aux distances d_X et d_Y. En fait ce sont les mêmes topologies :

Proposition. *La topologie associée à d_∞ est la topologie produit.*

Démonstration. Il s'agit de montrer que tout ouvert de la topologie produit est un ouvert de d_∞ et réciproquement.

1. On commence par le cas d'un ouvert élementaire $U \times V$ avec $U \in \mathcal{O}_X$ et $V \in \mathcal{O}_Y$. Pour chaque $(x, y) \in U \times V$, il existe $r_x, r_y > 0$ tels que $B_X(x, r_x) \subseteq U$ et $B_Y(y, r_y) \subseteq V$. Posons $r := \min(r_x, r_y)$ qui est strictement positif. Ppar une propriété bien utile des boules de la distance d_∞ sur $X \times Y$:
$$B_{d_\infty}((x, y), r) = B_X(x, r) \times B_Y(y, r).$$
Donc $B_{d_\infty}((x, y), r) \subseteq U \times V$. Donc $U \times V$ est bien un ouvert pour la distance d_∞. Donc tout ouvert de la topologie produit, étant réunion d'ouverts élémentaires, est également ouvert pour d_∞.
2. Réciproquement, soit W un ouvert pour d_∞. Pour chaque $(x, y) \in W$, on choisit un $r_{x,y} > 0$ tel que $B_{d_\infty}((x, y), r_{x,y}) \subseteq W$. Alors :
$$W = \bigcup_{(x,y)\in W} B_{d_\infty}((x, y), r_{x,y}) = \bigcup_{(x,y)\in W} B_X(x, r_{x,y}) \times B_Y(y, r_{x,y}),$$
donc W est bien réunion d'ouverts élémentaires, c'est donc un ouvert de la topologie produit.

□

3.4 Position d'un point par rapport à une partie

Intérieur d'une partie

Soit $A \subseteq X$ une partie d'un espace topologique. Elle n'est pas nécessairement ouverte (pas nécessairement voisinage de tous ses points), mais elle peut être voisinage de certains points...

Définition. Soit $(X, \mathcal{O})$ un espace topologique, et soit $A \subseteq X$.

1. Un point $x \in X$ est **intérieur** à A dans X si A est un voisinage de x dans X, c'est-à-dire si A contient un ouvert qui contient x.
2. On appelle **intérieur** de A dans X, et on note $\mathring{A}$, l'ensemble des points intérieurs à A dans X.

⚠ Dans un espace métrique (X, d) : le point x appartient à $\mathring{A}$ si et seulement si il existe $r > 0$ tel que $B(x, r) \subseteq A$.

⚠ Attention, il s'agit de notions relatives : on parle de l'intérieur de A *dans* X. Par exemple considérons $[0, 1[\subset [0, +\infty[\subset \mathbb{R}$:
— l'intérieur de $[0, 1[$ dans $\mathbb{R}$ est $]0, 1[$;
— l'intérieur de $[0, 1[$ dans $[0, +\infty[$ est $[0, 1[$.

Proposition. *Propriétés de l'intérieur :*

1. $\mathring{\emptyset} = \emptyset$ *et* $\mathring{X} = X$.
2. *Pour une partie* $A \subseteq X$ *:*
   a) $\mathring{A}$ *est le plus grand ouvert de* X *contenu dans* A.
   b) A *est ouvert si et seulement si* $\mathring{A} = A$.

Démonstration. ✎

1. Par définition.
2. a) On montre que $\mathring{A}$ est un ouvert contenu dans A, et que tout ouvert contenu dans A est contenu dans $\mathring{A}$
      i. Il est clair que $\mathring{A} \subseteq A$: si A contient un ouvert qui contient x, alors x appartient à A.
      ii. Si $x \in \mathring{A}$, soit U un ouvert tel que $x \in U \subseteq A$. Alors tout point $y \in U$ appartient à $\mathring{A}$, par définition. Ainsi $\mathring{A}$ est voisinage de tous ses points, donc c'est un ouvert. De plus, si U est un ouvert tel que $U \subseteq A$, alors par définition tous les points de U appartiennent à $\mathring{A}$ et donc $U \subseteq \mathring{A}$.
   b) Si A est ouvert, alors c'est le plus grand ouvert contenu dans lui-même, donc $\mathring{A} = A$. Si $\mathring{A} = A$, alors A est ouvert : on a démontré que $\mathring{A}$ est ouvert.

□

Exercice. ✎ Montrer que $A \subseteq B \Rightarrow \mathring{A} \subseteq \mathring{B}$ et que $\mathring{\mathring{A}} = \mathring{A}$.

Adhérence d'une partie

Définition. Soit $(X, \mathcal{O})$ un espace topologique, et soit A une partie de X.

1. Un point $x \in X$ est **adhérent** à A dans X si tout voisinage de x intersecte A.
2. On appelle **adhérence** de A dans X, et on note $\overline{A}$, l'ensemble des points adhérents à A dans X.

⚠ Dans un espace métrique (X, d) : le point x est adhérent à A si et seulement si $B(x, r) \cap A \neq \emptyset$ pour tout $r > 0$.

⚠ La notion d'adhérence est relative : on parle de l'adhérence de A dans X. Considérons par exemple $]0, 1] \subset]0, +\infty[\subset \mathbb{R}$. L'adhérence de $]0, 1]$ dans $\mathbb{R}$ est $[0, 1]$. L'adhérence de $]0, 1]$ dans $]0, +\infty[$ est $]0, 1]$.

Proposition. *Propriétés de l'adhérence :*

1. $\overline{\emptyset} = \emptyset$ *et* $\overline{X} = X$.
2. *Pour une partie* $A \subseteq X$ *:*
   a) $\overline{A}$ *est le plus petit fermé de* X *contenant* A.
   b) A *est fermé si et seulement si* $\overline{A} = A$.

Démonstration. ✎

1. Par définition.
2. a) On montre que $\overline{A}$ est un fermé contenant A, et que tout fermé contenant A contient $\overline{A}$
      i. Il est clair que $A \subseteq \overline{A}$: si x appartient à A, alors tout voisinage de x contient un point de A, à savoir x.
      ii. On montre que le complémentaire de $\overline{A}$ est ouvert. Si $x \notin \overline{A}$, alors il existe un ouvert U contenant x tel que $U \cap A = \emptyset$, et alors tous les points de U sont dans le complémentaire de $\overline{A}$. Ainsi $X \setminus \overline{A}$ est voisinage de x, ce qu'on voulait montrer.
      iii. Si F est un fermé contenant A, pour montrer que $\overline{A} \subseteq F$ on montre que $X \setminus F \subseteq X \setminus \overline{A}$. Pour cela, soit $x \in X \setminus F$. Or $X \setminus F$ est ouvert (F est fermé) et $(X \setminus F) \cap F = \emptyset$, donc aussi $(X \setminus F) \cap A = \emptyset$, donc $x \notin \overline{A}$, ce qu'on voulait montrer.

   b) Si A est fermé, alors c'est le plus petit fermé qui contient A, donc $\overline{A} = A$. Si $\overline{A} = A$, alors A est fermé : on a démontré que $\overline{A}$ est fermé.

□

Exercice. ✎ Montrer que $A \subseteq B \Rightarrow \overline{A} \subseteq \overline{B}$ et que $\overline{\overline{A}} = A$.

Caractérisation séquentielle de l'adhérence dans un espace métrique

Proposition. *Soit (X, d) un espace métrique, et soit $A \subseteq X$. Alors, pour un point $x \in X$:*

$$x \in \overline{A} \iff x \text{ est la limite d'une suite convergente de points de } A.$$

⚠ L'implication $\Leftarrow$ est vraie dans tout espace topologique, mais il y a des contre-exemples pour $\Rightarrow$.

Démonstration.

1. Sens $\Leftarrow$: immédiat en appliquant les définitions (convergence, adhérence).
2. Sens $\Rightarrow$. Soit $x \in \overline{A}$. Pour chaque entier $n \geq 1$, l'intersection $A \cap B(x, 1/n)$ est non vide, donc on peut y choisir un point x_n. On obtient ainsi une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de points de A qui converge vers x.

□

Corollaire. *Soit $A \subseteq X$ avec (X, d) espace métrique. Alors A est fermée si et seulement si, pour toute suite convergente $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de points de A, on a $\lim x_n \in A$.*

⚠ Ceci ne dit pas que toute suite de points d'un fermé est convergente. Seulement que, si une suite est convergente et que tous ses éléments sont dans A, alors la limite est également dans A.

Exemple. $A =]0, 1]$ n'est pas fermé dans $\mathbb{R}$ usuel car $1/n$ converge vers 0 lorsque $n \to +\infty$: on a une suite de points de A, qui converge dans $\mathbb{R}$, mais dont la limite n'appartient pas à A.

Densité

Définition. Soit $(X, \mathcal{O})$ un espace topologique. Une partie $A \subseteq X$ est **dense** dans X si $\overline{A} = X$.

De manière équivalente, une partie A est dense dans X si tout voisinage de tout point de X contient au moins un point de A. Dans un espace métrique, on peut remplacer « tout voisinage de x » par « toute boule centrée en x », et dire que A est dense revient à dire que tout point de X est la limite d'une suite de points de A.

Exemple. $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ sont denses dans $\mathbb{R}$ usuel. L'ensemble des matrices inversibles est dense dans $M_n(\mathbb{R})$: voir feuille TD2.

⚠ Dire qu'une partie est dense dans X, c'est dire qu'elle « remplit X presque partout ». Ceci peut être utilisé pour montrer qu'une propriété est vraie pour tous les $x \in X$: il suffit parfois de montrer qu'elle est vraie pour tous les x d'une partie dense (voir plus loin).

Définition. On dit qu'un espace topologique $(X, \mathcal{O})$ est **séparable** s'il existe une partie $A \subseteq X$ qui est dénombrable et dense dans X.

3.5 Convergence des suites. Valeurs d'adhérence

Dans un espace non séparé, la convergence peut être « étrange ». Par exemple dans l'espace de Sierpinski $X = \{a, b\}$, que dire de la convergence de la suite constante $(a, a, a, \dots)$?

Proposition. *Dans un espace topologique séparé, une suite convergente possède une unique limite.*

Démonstration. Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite qui converge vers a dans un espace séparé X, alors elle ne converge vers aucun autre point. En effet, si $b \in X$ est différent de a, alors il existe des ouverts U, V disjoints tels que $a \in U$ et $b \in V$. Comme la suite converge vers a, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $x_n \in U$ pour tout $n \geq N$. Comme U et V sont disjoints, on a donc $x_n \notin V$ pour tout $n \geq N$, et donc la suite ne converge pas vers b. □

Proposition. *Soient X, Y des espaces topologiques et $f : X \to Y$ une application continue au point $a \in X$. Si $x_n \to a$ dans X, alors $f(x_n) \to f(a)$ dans Y.*

Démonstration. On suppose que $x_n \to a$ dans X. Pour montrer que $f(x_n) \to f(a)$, soit V un ouvert de Y contenant $f(a)$. Par continuité, il existe un ouvert U de X contenant a tel que $f(U) \subseteq V$. Par hypothèse de convergence, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $x_n \in U$ pour tout $n \geq N$. Alors $f(x_n) \in f(U)$ et donc $f(x_n) \in V$ pour tout $n \geq N$, ce que l'on voulait. □

Proposition. *Dans un espace métrique, toute suite convergente est bornée.*

Démonstration. Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers a dans un espace métrique (X, d), alors il existe un $N \in \mathbb{N}$ tel que $x_n \in B(a, 1)$ pour tout $n \geq N$. Posons :

$$r := \max(1, d(a, x_1) + 1, \dots, d(a, x_{N-1}) + 1).$$

Alors tous les termes x_n appartiennent à la boule $B(a, r)$. Donc la suite est bornée. □

Suites d'un produit

Soient $(X, \mathcal{O}_X)$ et $(Y, \mathcal{O}_Y)$ deux espaces topologiques. On munit $X \times Y$ de la topologie produit. Se donner une suite $(x_n, y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de points de $X \times Y$ revient à se donner une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de points de X et une suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de points de Y.

Proposition. *$(x_n, y_n) \to (a, b)$ dans $X \times Y$ si et seulement si $x_n \to a$ dans X et $y_n \to b$ dans Y.*

Démonstration.

1. Sens $\Rightarrow$: résulte de la continuité des projections et de la proposition ci-dessus reliant continuité et convergence des suites.
2. Sens $\Leftarrow$. On suppose que $x_n \to a$ et $y_n \to b$. Pour montrer que $(x_n, y_n) \to (a, b)$, soit $U \times V$ un ouvert élémentaire de $X \times Y$. Par hypothèse, il existe N_1 tel que $x_n \in U$ pour tout $n \geq N_1$, et il existe N_2 tel que $y_n \in V$ pour tout $n \geq N_2$. En posant $N := \max(N_1, N_2)$, on a donc $(x_n, y_n) \in U \times V$ pour tout $n \geq N$, ce que l'on voulait.

□

⚠ Généralisation immédiate à un produit fini d'espaces topologiques.

Exemple. Une suite $(x^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ de points de $\mathbb{R}^n$ converge si et seulement si chaque « suite de coordonnées » converge dans $\mathbb{R}$ usuel.

Valeurs d'adhérence

Définition. Soit $(X, \mathcal{O})$ un espace topologique. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de points de X. Un point $a \in X$ est **valeur d'adhérence** de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si pour tout voisinage V de a il existe une infinité d'indices $n \in \mathbb{N}$ tels que $x_n \in V$.

Proposition. *Soit (X, d) un espace métrique. Alors $a \in X$ est valeur d'adhérence de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si et seulement si il existe une sous-suite de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers a.*

Démonstration. ✎ Double implication.

1. Sens $\Leftarrow$ (vrai dans tout espace topologique). Si $x_{\phi(n)} \to a$ alors tout voisinage de a contient tous les $x_{\phi(n)}$ pour n assez grand, donc contient une infinité de termes de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
2. Sens $\Rightarrow$ (propre aux espaces métriques). On suppose que tout voisinage de a contient une infinité de termes de la suite. En particulier $B(a, 1)$ doit contenir un terme $x_{\phi(1)}$. Puis on construit par récurrence une extractrice ϕ de sorte que $x_{\phi(n)} \in B(a, 1/n)$ pour tout $n \geq 1$. On obtient ainsi une suite extraite qui converge vers a.

□

⚠ Le sens $\Rightarrow$ peut être faux dans un espace topologique non métrisable.

Proposition. *Soit $(X, \mathcal{O})$ un espace topologique, soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de points de X. Alors l'ensemble des valeurs d'adhérence de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est fermé dans$X$.*

Démonstration. ✎ On montre que l'ensemble des valeurs d'adhérence de $(x_n)_{n\in N}$ est $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{\{x_k \mid k \geq n\}}$:

$a \in X$ est valeur d'adhérence de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$
$\Leftrightarrow$ tout voisinage de a contient une infinité de termes de la suite
$\Leftrightarrow$ pour tout voisinage V de a et tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un $p \geq n$ tel que $x_p \in V$
$\Leftrightarrow$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout voisinage Vde a, il existe un $p \geq n$ tel que $x_p \in V$
$\Leftrightarrow$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, tout voisinage V de a intersecte $\{x_p\,;\, p \geq n\}$
$\Leftrightarrow$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a \in \overline{\{x_p\,;\, p \geq n\}}$
$\Leftrightarrow$ $a \in \cap_{n\in\mathbb{N}}\overline{\{x_p\,;\, p \geq n\}}$

L'ensemble des valeurs d'adhérence est une intersection de fermés, donc c'est un fermé. □

3.6 Continuité des applications

Caractérisation séquentielle de la continuité dans les espaces métriques

Dans les espaces métriques, la continuité peut se formuler en termes de convergence de suites :

Proposition. *Soient (X, d_X) et (Y, d_Y) deux espaces métriques, et soit $f : X \to Y$ une application. Alors f est continue en $a \in X$ si et seulement si :*

> *pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de points de X telle que $x_n \to_{n\to\infty} a$ dans X, alors $f(x_n) \to_{n\to\infty} f(a)$ dans Y.*

⚠ Le sens $\Leftarrow$ peut être faux dans des espaces topologiques non métriques.

Démonstration.

1. Sens $\Rightarrow$: déjà vu.
2. Sens $\Leftarrow$: par contraposée. On suppose que f n'est pas continue en a. Donc il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $\delta > 0$ l'image $f(B(a, \delta)$ n'est pas contenue dans $B(f(a), \varepsilon$. On choisit un tel ε. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe donc un point $x_n \in B(a, 1/n)$ tel que $f(x_n) \notin B(f(a), \varepsilon)$. Ceci définit une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de points de X telle que $x_n \to a$ mais $f(x_n) \not\to f(a)$.

□

Opérations sur les fonctions continues

Proposition. *Soient (X, d_X), (Y, d_Y) et (Z, d_Z) trois espaces topologiques, et soient $f : X \to Y$ et $g : Y \to Z$ deux applications.*

1. *Si f est continue en $a \in X$ et si g est continue en $f(a) \in Y$, alors $g \circ f$ est continue en a.*
2. *Si f est continue sur X et si g est continue sur Y, alors $g \circ f$ est continue sur X.*

Démonstration.

1. Si W est un voisinage de $g(f(a))$, alors $g^{-1}(W)$ est un voisinage de $f(a)$, donc $f^{-1}(g^{-1}(W))$ est un voisinage de a. Or $f^{-1}(g^{-1}(W)) = (g \circ f)^{-1}(W)$.
2. Même chose avec des ouverts.

□

Proposition. *Soient $(X, \mathcal{O}_X)$ et $(Y, \mathcal{O}_Y)$ des espaces topologiques, soit $f : X \to Y$ une application continue, et soit $A \subseteq X$. Alors la restriction $f_{\restriction A} : A \to Y$ est continue (pour la topologie induite sur A).*

Démonstration. Par définition : si V est un ouvert de Y, alors ${f_{\restriction A}}^{-1}(V) = A \cap f^{-1}(V)$. □

Proposition. *Soient X et Y deux espaces topologiques. On munit $X \times Y$ de la topologie produit. Alors les projections $p_1 : X \times Y \to X$ et $p_2 : X \times Y \to Y$ sont continues.*

Démonstration. Déjà vu : définition de la topologie produit. $\square$

Proposition. *Soient X, Y, Z trois espaces topologiques, et soit $f : X \to Y \times Z$. On écrit $f = (f_1, f_2)$ avec $f_1 : X \to Y$ et $f_2 : X \to Z$. Alors f est continue si et seulement si f_1 et f_2 sont continues.*

Démonstration.

1. Sens $\Rightarrow$: conséquence de la proposition précédente.
2. Sens $\Leftarrow$: on utilise la base d'ouverts de $Y \times Z$. Soit $x \in X$, et soit $(y, z) := f(x) \in Y \times Z$. Si V (respectivement W) est un voisinage ouvert de y (respectivement de z), alors $V \times W$ est un voisinage ouvert de base de (y, z), et $f^{-1}(V \times W) = {f_1}^{-1}(V) \cap {f_2}^{-1}(W)$ est donc un voisinage ouvert de x car ${f_1}^{-1}(V)$ et ${f_2}^{-1}(W)$ sont des ouverts de X (continuité).

$\square$

Proposition. *Soit (X, d_X) un espace topologique, soit (E, N) un espace vectoriel normé réel.*

1. *Si $f : X \to E$ et $g : X \to E$ sont continues, alors $f + g : X \to E$ est continue.*
2. *Si $f : X \to E$ est continue et si $\lambda \in \mathbb{R}$, alors $\lambda f : X \to E$ est continue.*

Démonstration. Résulte de la continuité des opérations $+$ et $\cdot$ dans un espace vectoriel normé :

1. L'addition $E \times E \to E$ est continue (topologie produit sur $E \times E$) car lipschitzienne : $d(u + v, u' + v') = \|(u + v) - (u' + v')\| \leq \|u - u'\| + \|v - v'\| = d_1((u, v), (u', v'))$.
2. De même pour la multiplication par un scalaire $\mathbb{R} \times E \to E$.
3. Pour conclure, il suffit de dire que $f + g : X \to E$ est la composée de $x \mapsto (f(x), g(x))$ qui est continue, et de l'addition dans E :

$$\begin{array}{ccccc} X & \longrightarrow & E \times E & \xrightarrow{\text{addition}} & E \\ & & & & \\ x & \longmapsto & (f(x), g(x)) & \longmapsto & f(x) + g(x) \end{array}$$

   De même pour λf.

$\square$

Proposition. *Soit (X, d_X) un espace topologique, et soient $f : X \to \mathbb{R}$ et $g : X \to \mathbb{R}$ deux fonctions.*

1. *Si f et g sont continues, alors fg est continue.*
2. *L'ensemble $U := \{x \in X \,;\, f(x) \neq 0\}$ est un ouvert de X, et $1/f : U \to \mathbb{R}$ est continue.*

Démonstration. Comme dans la démonstration précédente, il suffit d'observer que la multiplication dans $\mathbb{R}$ est continue et de voir $x \mapsto f(x)g(x)$ comme composée de deux applications continues. De même pour le deuxième point (continuité de la fonction inverse $t \mapsto 1/t$ de $\mathbb{R}^*$ dans $\mathbb{R}^*$). $\square$

Exemple. On identifie l'ensemble $M_n(\mathbb{R})$ à $\mathbb{R}^{n^2}$, et le munit de la distance d_∞ correspondante. Pour cette distance, il est clair que toutes les opérations matricielles sont continues (addition de deux matrices, multiplication d'une matrice par un scalaire, multiplication de deux matrices, inversion d'une matrice inversible), de même que les fonctions « déterminant », « trace », etc. En effet, toutes ces applications et fonctions se définissent à partir des coefficients des matrices, par additions et multiplications dans $\mathbb{R}$, et donc peuvent se décomposer comme compositions, sommes et produits d'applications continues. On en déduit que :

1. Une suite $(A^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ de matrices de $M_n(\mathbb{R})$ converge vers la matrice A dans $M_n(\mathbb{R})$ si et seulement si $\lim_{k\to+\infty} a_{i,j}^{(k)} = a_{i,j}$ quels que soient $i, j \in \{1, \dots, n\}$. Par exemple, $A - \frac{1}{k}I_n$ converge vers A lorsque $k \to +\infty$.
2. $GL_n(\mathbb{R})$ est un ouvert de $M_n(\mathbb{R})$, c'est d'ailleurs un ouvert dense. La densité permet des démonstrations... par densité (voir exercices).
3. L'ensemble des matrices symétriques (de même antisymétriques) est un fermé de $M_n(\mathbb{R})$.
4. $O(n)$ est un fermé de $M_n(\mathbb{R})$, et même un compact (fermé borné).

Exemple d'utilisation de la densité

On veut montrer que $\chi_{AB} = \chi_{BA}$ (polynômes caractéristiques) quelles que soient les matrices $A, B \in M_n(\mathbb{R})$. Pour cela :

1. C'est vrai si A est inversible, car alors AB et BA sont semblables, donc ont même polynôme caractéristique : $AB = A(BA)A^{-1}$.
2. Puis on raisonne par densité et continuité du déterminant : si $A \in M_n(\mathbb{R})$ est quelconque, il existe une suite de matrices inversibles A_k qui converge vers A (densité de $GL_n(\mathbb{R})$ dans $M_n(\mathbb{R})$), d'où :

$$\begin{aligned}
\chi_{AB}(X) &= \det(XI_n - AB) = \lim_{k\infty} \det(XI_n - A_kB) = \lim_{k\infty} \chi_{A_kB}(X) \\
&= \lim_{k\infty} \chi_{BA_k}(X) = \lim_{k\infty} \det(XI_n - BA_k) = \det(XI_n - BA) \\
&= \chi_{BA}(X)
\end{aligned}$$

3.7 Homéomorphismes

Définition. Soient X et Y deux espaces topologiques. Une application $f : X \to Y$ est un **homéomorphisme** de X sur Y si f est bijective et si f et f^{-1} sont continues. On dit que X et Y sont **homéomorphes** s'il existe un homéomorphisme de X sur Y.

⚠ La réciproque d'une application bijective continue n'est pas nécessairement continue. Par exemple, posons dans $\mathbb{R}^2$ usuel :

— $X := (]-\infty, 0[\times\{1\}) \cup ([0, +\infty[\times\{2\})$

— $Y := \mathbb{R} \times \{0\}$

et définissons $f : X \to Y$ par $f(x, \star) = x$ quel que soit $x \in \mathbb{R}$ (avec $\star = 1$ ou 2 selon le cas). Alors f est bijective, continue, mais sa réciproque f^{-1} n'est pas continue : par exemple $f^{-1}(-1/n) = (-1/n, 1)$ pour tout $n \geq 1$, ce qui ne converge pas vers $f^{-1}(0) = (0, 2)$.

⚠ Dire que deux espaces métriques (plus généralement topologiques) sont homéomorphes, c'est qu'ils sont « les mêmes » du point de vue de la topologie : non seulement un homéomorphisme $f : X \to Y$ réalise une bijection entre les points de X et ceux de Y, mais aussi entre les *ouverts* de X et ceux de Y. En effet, si $A \subseteq X$ et $B \subseteq Y$:

$$A \text{ est ouvert dans } X \text{ si et seulement si } f(A) \text{ est ouvert dans } Y$$
$$B \text{ est ouvert dans } Y \text{ si et seulement si } f^{-1}(B) \text{ est ouvert dans } X$$

Exemples

1. Dans $\mathbb{R}$ usuel, tous les intervalles ouverts $]a, b[$ avec $a < b$ sont homéomorphes (éventuellement $a = -\infty$ et $b = +\infty$).
2. Dans $\mathbb{R}^2$ usuel, un carré et un cercle sont homéomorphes.
3. Dans $\mathbb{R}$ usuel, $[0, 1]$ et $[0, 1[$ ne sont pas homéomorphes, pourquoi ?
4. Toute isométrie est un homéomorphisme.