Topologie des espaces métriques HLMA502 2020-21 version courte (sans démonstrations)

David Théret

28 septembre 2020

Pictogrammes

⚠ désigne un point important

✎ désigne une démonstration ou un exercice que vous devez avoir compris et savoir refaire sans indication lors d'une évaluation.

✎✎ désigne une démonstration ou un exercice plus difficile, exigible avec des indications précises lors d'une évaluation.

✎ désigne une démonstration ou un exercice très difficile, non exigible lors d'une évaluation.

1 Espaces métriques

1.1 Distance

Définition 1. *Une **distance** sur un ensemble X est une fonction $d : X \times X \to \mathbb{R}$ vérifiant, quels que soient $x, y, z \in X$:*

1. $d(x,y) \geq 0$, *avec égalité si et seulement si* $x = y$;
2. $d(x,y) = d(y,x)$;
3. $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$.

*On dit que $d(x,y)$ est la **distance** entre $x$et y.*

⚠ Condition 3 : **inégalité triangulaire**

Définition 2. *Un **espace métrique** (X,d) est un ensemble X muni d'une distance d.*

Exercice. ✎ Une distance vérifie la « deuxième inégalité triangulaire » :

$$|d(x,z) - d(z,y)| \leq d(x,y) \qquad \forall x, y, z \in X$$

Exemples

✎ Savoir montrer que les distances sont bien des distances...

1. **Distance discrète** sur un ensemble quelconque X : définie par :

$$d(x,y) := \begin{cases} 0 & \text{si } x = y\,; \\ 1 & \text{si } x \neq y. \end{cases}$$

2. Espace métrique « $\mathbb{R}$ usuel » : l'ensemble $\mathbb{R}$ muni de la distance $d(x,y) := |x-y|$.
3. Espace métrique « $\mathbb{C}$ usuel » : l'ensemble $\mathbb{C}$ muni de la distance $d(z,w) := |z-w|$.
4. Plusieurs distances classiques sur $\mathbb{R}^n$:
   a) $d_\infty(x,y) := \max(|x_1 - y_1|, \ldots, |x_n - y_n|)$.
   b) $d_1(x,y) := |x_1 - y_1| + \cdots + |x_n - y_n|$.
   c) $d_2(x,y) := \sqrt{|x_1 - y_1|^2 + \cdots + |x_n - y_n|^2}$ (**distance euclidienne**)

5. **Distance de la convergence uniforme** sur $\mathcal{B}(A, \mathbb{R})$ ensemble de toutes les fonctions bornées de A dans $\mathbb{R}$, où A ensemble quelconque :
$$d_\infty(f, g) := \sup_{a \in A} |f(a) - g(a)|.$$
6. Sur $C^0([a, b], \mathbb{R})$, en plus de d_∞ :
$$d_1(f, g) := \int_a^b |f(t) - g(t)|\, dt$$
$$d_2(f, g) := \sqrt{\int_a^b |f(t) - g(t)|^2\, dt}$$

Distance associée à une norme

Soit E espace vectoriel réel (voire complexe).

Définition 3. *Une **norme** sur E est une fonction $N : E \to \mathbb{R}$ vérifiant :*

1. $N(u) \geq 0$, *avec égalité si et seulement si* $u = 0_E$ *;*
2. $N(\lambda u) = |\lambda| N(u)$ *;*
3. $N(u + v) \leq N(u) + N(v)$.

que soient $u, v \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ (ou $\lambda \in \mathbb{C}$ pour un espace vectoriel complexe).

Toute norme définit une distance.

Proposition 4. *Soit N une norme sur l'espace vectoriel E. Alors $d(x, y) := N(x - y)$ définit une distance sur E.*

Démonstration. □

Exercice. Définir les normes qui donnent les distances des exemples 2-6.

Certaines normes sont issues d'un produit scalaire.

Définition 5. *Un **produit scalaire** sur E est une* forme bilinéaire $h : E \times E \to \mathbb{R}$ *vérifiant :*

1. $h(x, y) = h(y, x)$
2. $h(x, x) \geq 0$, *avec égalité si et seulement si* $x = 0_E$

quels que soient $x, y \in E$.

Un produit scalaire vérifie :

1. **inégalité de Cauchy-Schwarz** :
$$|h(x,y)| \leq \sqrt{h(x,x)}\sqrt{h(y,y)}$$
avec égalité si et seulement si x et y sont colinéaires
2. **inégalité de Minkowski** :
$$\sqrt{h(x+y,x+y)} \leq \sqrt{h(x,x)} + \sqrt{h(y,y)}$$

On en déduit que $N(x) := \sqrt{h(x,x)}$ définit une norme sur E, et donc une distance.

Exercice. Quels sont les normes précédentes qui proviennent d'un produit scalaire ? Simplifier $N(x+y)^2 + N(x-y)^2$ si N vient d'un produit scalaire...

Sous-espace métrique : distance induite sur une partie

On considère un espace métrique (X,d) et une partie $A \subseteq X$. La fonction $d_A : A \times A \to \mathbb{R}$ définie par $d_A(x,y) := d(x,y)$ est une distance sur A.

Définition 6. *On dit que d_A est la distance sur A **induite** par la distance d sur X. On dit que (A,d_A) est un **sous-espace métrique** de (X,d).*

Produit d'espaces métriques

(X,d_X) et (Y,d_Y) sont deux espaces métriques. Plusieurs distances utiles sur $X \times Y$:

$$\begin{aligned} d_\infty((x,y),(x',y')) &:= \max(d_X(x,x'), d_Y(y,y')) \\ d_1((x,y),(x',y')) &:= d_X(x,x') + d_Y(y,y') \\ d_2((x,y),(x',y')) &:= \sqrt{d_X(x,x')^2 + d_Y(y,y')^2} \end{aligned}$$

— Distances « équivalentes », voir plus loin
— Généralisation à tout produit fini $X_1 \times \cdots \times X_n$ d'espaces métriques.
— On retrouve les trois distances usuelles sur $\mathbb{R}^n = \mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}$ en partant de $\mathbb{R}$ usuel.

Exercice. d_∞, d_1 et d_2 sont bien des distances sur $X \times Y$.

Distance à une partie

(X,d) un espace métrique, $A \subseteq X$ et $x \in X$. On définit la **distance** de x à A :

$$d(x,A) := \inf\{d(x,a) \; ; a \in A\}$$

« inf » pas nécessairement réalisé. En particulier, la distance de x à A peut être nulle sans que x appartienne à A.

Exercice. Dans $\mathbb{R}$ usuel, déterminer $d(2,[0,1])$, $d(2,[0,1[)$, $d(0,]0,1])$, $d(\sqrt{2},\mathbb{Q})$.

1.2 Boules

(X, d) un espace métrique.

Définition 7. *Soient $a \in X$ et $r \in \mathbb{R}_+$.*
- $B(a, r) := \{x \in X \mid d(x, a) < r\}$ ***boule ouverte*** *de centre a et rayon r*
- $D(a, r) := \{x \in X \mid d(x, a) \leq r\}$ ***boule fermée (disque)*** *de centre a et rayon r*
- $S(a, r) := \{x \in X \mid d(x, a) = r\}$ ***sphère*** *de centre a et rayon r*

Autres notations pour les boules fermées : $B_f(a, r)$, $B'(a, r)$, $\overline{B}(a, r)$...

Remarque. rayon nul

Exemple. Boules des espaces métriques de référence : faire dessins
- $\mathbb{R}$ usuel,
- $\mathbb{R}^2$ avec d_∞, d_1 et d_2,
- X espace métrique discret,
- $\mathcal{B}(A, \mathbb{R})$ avec distance de la convergence uniforme, par exemple $C^0([a, b], \mathbb{R})$

Boules d'un sous-espace métrique

A partie de (X, d) munie de distance induite d_A
Pour $a \in A$ et $r \in \mathbb{R}_+$:

$$B_A(a, r) = A \cap B_X(a, r)$$
$$D_A(a, r) = A \cap D_X(a, r)$$
$$S_A(a, r) = A \cap S_X(a, r)$$

Séparation des points

Dans un espace métrique, les boules « séparent les points ».

Proposition 8. *Soit (X, d) un espace métrique, et soient a, b deux points distincts de X. Alors il existe un réel $r > 0$ tel que $B(a, r) \cap B(b, r) = \emptyset$.*

Démonstration. □

Parties bornées, diamètre

Définition 9. *Le **diamètre** $\operatorname{diam}(A)$ d'une partie $A \subseteq X$ est le nombre (éventuellement $+\infty$) défini par :*

$$\operatorname{diam}(A) := \sup d(x, y) \mid x, y \in A.$$

*On dit que A est **bornée** si son diamètre est fini, c'est-à-dire s'il existe un réel $M > 0$ tel que $d(x, y) \leq M$ quels que soient $x, y \in A$.*

Exemple. Majoration du diamètre de $B(x, r)$ dans un espace métrique quelconque. Diamètre des boules d'un espace métrique discret.

Proposition 10. *Une partie $A \subseteq X$ est bornée si et seulement si elle est contenue dans une boule, c'est-à-dire s'il existe $x \in X$ et $r > 0$ tels que $A \subseteq B(x, r)$.*

Démonstration. □

1.3 Convergence des suites, continuité des applications

(X, d) espace métrique, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suite de points de X.

Définition 11. *On dit qu'une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **converge** vers $a \in X$ dans (X, d) si :*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \mid \forall n \geq N, x_n \in B(a, \varepsilon).$$

Proposition 12. *Une suite convergente dans (X, d) n'a qu'une seule limite.*

Démonstration. □

Pas toujours vrai dans un espace topologique général (chapitre suivant).

Exemple. Suites convergente d'un espace métrique discret. Suites convergentes dans $\mathcal{B}(A, \mathbb{R})$ pour la distance de la convergence uniforme.

Définition 13. *Soient (X, d_X) et (Y, d_Y) deux espaces métriques, et soit $f : X \to Y$ une application. On dit que f est **continue** au point $a \in X$ si*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \mid f(B_X(a, \delta)) \subseteq B_Y(f(a), \varepsilon).$$

*On dit que f est **continue** si elle est continue en tout point de X.*

Exemple. Fonctions constantes, fonction identité Id_X continues

Cas particuliers d'applications continues

Définition 14. *$f : X \to Y$ une application entre espaces métriques*
- *f est k-**lipschitzienne** (pour un certain réel $k \geq 0$) si*

$$\forall x, x' \in X, d_Y(f(x), f(x')) \leq k d_X(x, x')$$

*f est **lipschitzienne** si elle est k-lipschitzienne pour un certain k.*
- *f est **contractante** (ou encore est une **contraction**) si elle est k-lischitzienne avec $0 \leq k < 1$.*
- *f **préserve la distance** si*

$$\forall x, x' \in X, d_Y(f(x), f(x')) = d_X(x, x')$$

- *f est une **isométrie** si elle est bijective et préserve la distance.*

Clair : une application qui préserve la distance est 1-lipschitzienne. Une bijection f est une isométrie si et seulement si f et f^{-1} sont 1-lipschitziennes.

Exemple. Distance à un point fixé, à une partie.

1.4 Ouverts et fermés d'un espace métrique

Questions :
- Une distance = outil quantitatif qui permet de définir les notions de « convergence d'une suite » et de « continuité d'une application »
- changer de distance peut modifier les notions de convergence et de continuité : une suite qui converge pour une certaine distance peut ne pas converger pour une distance différente, ou peut converger vers une autre limite
- pour une distance donnée, les notions de convergence et continuité qui lui sont attachées dépendent-elles de *cette distance* particulière ? D'autres distances peuvent donner les mêmes notions de convergence et continuité ? On peut exprimer convergence et continuité sans faire référence à une distance particulière ?

Les ouverts d'un espace métrique (X, d) : des parties de X qui généralisent les boules ouvertes :
- toute boule ouverte de X est un ouvert de X, mais il y a d'autres ouverts ;
- la convergence des suite et la continuité des applications peuvent être définies à l'aide des ouverts ;
- des distances différentes peuvent posséder les mêmes ouverts, donc donner les mêmes notions de convergence et continuité.

1.4.1 Ouverts

(X, d) un espace métrique.

Définition 15. *Une partie $U \subseteq X$ est* ***ouverte*** *(on dit aussi que U est un* ***ouvert*** *de X) si tout point de U est le centre d'une boule ouverte contenue dans U :*

$$\forall x \in U, \exists r > 0 \mid B(x, r) \subseteq U.$$

Exemple. Dans $\mathbb{R}$ usuel : les intervalles ouverts sont ouverts, l'intervalle $[0, 1[$ n'est pas ouvert. Dans $\mathbb{R}^2$ euclidien, le « demi-plan ouvert » $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ est ouvert.

Exemple. Ouverts d'un espace métrique discret ?

Proposition 16. *Les boules ouvertes de (X, d) sont ouvertes.*

Démonstration. □

Proposition 17. *Tout ouvert non vide de (X, d) est réunion de boules ouvertes.*

Démonstration. □

Proposition 18. *Soit (X, d) un espace métrique. L'ensemble de ses ouverts possède les propriétés suivantes :*

1. *X et $\emptyset$ sont ouverts.*
2. *Si $(U_i)_{i \in I}$ est une famille quelconque d'ouverts, alors la réunion $\bigcup_{i \in I} U_i$ est un ouvert.*
3. *Si $U_1, \ldots, U_n$ est une famille finie d'ouverts, alors l'intersection $U_1 \cap \cdots \cap U_n$ est un ouvert.*

⚠ importance de l'hypothèse « famille finie »

Démonstration. □

Théorème 19. *Tout ouvert non vide de $\mathbb{R}$ usuel est réunion finie ou dénombrable d'intervalles ouverts deux à deux disjoints.*

Démonstration. Soit U ouvert non vide de $\mathbb{R}$.

1. Pour chaque $x \in U$, noter $I_x =]m_x, M_x[$ le plus grand intervalle ouvert contenant x et contenu dans U...
   a) ⚠ prouver existence et unicité !
   b) réunion de tous les intervalles ouverts contenant x et contenus dans U : intervalle, ouverte, contient x, donc ok
2. les différents I_x sont soit égaux soit disjoints deux à deux

3. choisir une famille $(x_i)_{i\in I}$ de nombres $x_i \in U$ telle que les intervalles I_{x_i} soient deux à deux disjoints
4. choisir un rationnel r_i dans $I_{x_i}[$: injection de I dans $\mathbb{Q}$
5. conclusion

□

1.4.2 Fermés

(X, d) un espace métrique.

Définition 20. *Une partie $F \subseteq X$ est **fermée** (on dit aussi que c'est un **fermé** de X) si $X \setminus F$ est ouverte.*

Exemple. ✎ Dans $\mathbb{R}$ usuel : $[0, 1]$ fermé, $[0, 1[$ pas fermé.

Exemple. ✎ Fermés d'un espace discret ?

Proposition 21. *Les boules fermées et les sphères de (X, d) sont fermées.*

Démonstration. ✎ □

Proposition 22. *Soit (X, d) un espace métrique. L'ensemble de ses fermés possède les propriétés suivantes :*

1. *X et $\emptyset$ sont fermés.*
2. *Si $(F_i)_{i\in I}$ est une famille quelconque d'ouverts, alors l'intersection $\bigcap_{i\in I} F_i$ est un fermé.*
3. *Si $F_1, \dots, F_n$ est une famille finie de fermés, alors la réunion $F_1 \cup \cdots \cup F_n$ est un fermé.*

⚠ importance de l'hypothèse « famille finie »

Démonstration. ✎ □

Exemple. ⚠ ✎ Dans un espace métrique :

1. les singletons sont fermés
2. toute partie finie est fermée

1.4.3 Convergence et continuité en termes d'ouverts

Proposition 23. *Soit (X, d) un espace métrique, et soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de points de X. Alors $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $a \in X$ si et seulement si : pour tout ouvert contenant a, il existe un $N \in \mathbb{N}$ tel que $x_n \in U$ pour tout $n \geq N$.*

⚠ on peut remplacer « toute boule ouverte centrée en a » par « tout ouvert contenant a » dans la définition de la convergence d'une suite vers $a \in X$.

Démonstration. ✎ Par double implication. □

Proposition 24. *Soient (X, d_X) et (Y, d_Y) des espaces métriques, et soit $f : X \to Y$ une application. Alors f est continue en $a \in X$ si et seulement si : pour tout ouvert V de Y contenant $f(a)$, il existe un ouvert U de X contenant a tel que $f(U) \subseteq V$.*

⚠ On peut remplacer « toute boule ouverte centrée en $f(a)$ » par « tout ouvert contenant $f(a)$ » et « il existe une boule ouverte centrée en a » par « il existe un ouvert contenant a » dans la définition de la continuité d'une application en $a \in X$.

Démonstration. ✎ Par double implication. □

1.5 Distances équivalentes

La convergence des suites et la continuité des applications peuvent s'exprimer en référence aux ouverts exclusivement, on peut se demander si des distances différentes peuvent avoir les mêmes ouverts...

Définition 25. *Soit X un ensemble, et soient d_1, d_2 deux distances sur X.*
- *On dit que d_1 et d_2 sont **topologiquement équivalentes** si elles définissent les mêmes ouverts.*
- *On dit que d_1 et d_2 sont **fortement équivalentes**, ou **équivalentes** tout court, s'il existe des constantes $\alpha > 0$ et $\beta > 0$ telles que*

$$\forall x, y \in X, \quad \alpha d_1(x, y) \leq d_2(x, y) \leq \beta d_1(x, y).$$

⚠ Deux normes N_1 et N_2 sur un espace vectoriel E sont **équivalentes** s'il existe des constantes $\alpha > 0$ et $\beta > 0$ telles que

$$\forall u \in E, \quad \alpha N_1(u) \leq N_2(u) \leq \beta N_1(u).$$

Les distances associées à des normes équivalentes sont donc (fortement) équivalentes.

Proposition 26. *Si d_1 et d_2 sont fortement équivalentes, alors elles sont topologiquement équivalentes.*

Démonstration. ✎ □

Exemple. ✎

— Distances usuelles d_∞, d_1, d_2 sur $\mathbb{R}^n$ fortement équivalentes

— Distances usuelles sur produit de deux espaces métriques fortement équivalentes.

— Sur $E = C^0([0,1], \mathbb{R})$, distances d_∞ et d_1 pas topologiquement équivalentes : par exemple que la d_∞-boule $B_{d_\infty}(0_E, 1)$ n'est pas ouverte pour d_1. Voir feuille TD1.

— ⚠ Toute distance d sur X est topologiquement équivalente à une distance *bornée*. Par exemple, $\delta(x,y) := \min(1, d(x,y))$ distance sur X, topologiquement équivalente à d. Voir feuille TD1.