Année 2019-2020
L3 — Mathématiques
HLMA502 Topologie

Feuille d'exercices 1

Exercice 1. Les fonctions suivantes sont-elles des distances sur $\mathbb{R}$?
(i) $d_1(x,y) = |x^2 - y^2|$; (ii) $d_2(x,y) = |x^3 - y^3|$; (iii) $d_3(x,y) = \exp(x-y)$

Exercice 2. Soit (X,d) un espace métrique. Montrer la **deuxième inégalité triangulaire** : $|d(x,y) - d(y,z)| \leq d(x,z)$ quels que soient $x,y,z \in X$.

Exercice 3. On dit qu'une distance d sur un ensemble X est **ultramétrique** si elle vérifie l'« inégalité ultramétrique » :

$$\forall x,y,z \in X, \quad d(x,z) \leq \max\{d(x,y), d(y,z)\}. \tag{1}$$

1. Montrer que l'inégalité (1) implique l'inégalité triangulaire ordinaire.
2. Dans un espace ultramétrique, montrer que :
   a) si $d(x,y) \neq d(y,z)$, alors il y a égalité dans (1), autrement dit « tous les triangles de X sont isocèles ».
   b) tout point d'une boule ouverte (ou fermée) est centre de cette boule.
   c) les boules (ouvertes, fermées) sont à la fois ouvertes et fermées.

Exercice 4. Soit X la partie de $\mathbb{R}^2$ définie par $X := ([0,1] \times \{0\}) \cup (\{0\} \times [0,1])$. On munit X de la distance induite par la distance d_∞ sur $\mathbb{R}^2$. Sur un dessin, représenter les boules de X de centre $(1,0)$ en discutant suivant la valeur du rayon.

Exercice 5. Soit $X = \mathcal{B}([0,1],\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions bornées de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$, muni de la distance d_∞.

1. Montrer que si $\lim_{n\to+\infty} f_n = f$ dans (X, d_∞), alors nécessairement $\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = f(x)$ pour chaque réel $x \in [0,1]$.
2. Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ par $f_n(x) := x^n$. Montrer que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne possède pas de limite dans (X, d_∞).
3. Montrer que la même suite converge vers la fonction nulle dans $C^0([0,1],\mathbb{R})$ muni de la distance d_1.

Exercice 6. On cherche à définir une distance sur l'ensemble $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ des suites réelles. Pour cela :

1. Montrer que $d(x,y) := \frac{|x-y|}{1+|x-y|}$ définit une distance sur $\mathbb{R}$ (utiliser l'exercice précédent avec la fonction $\phi(t) = \frac{t}{1+t}$).
2. Si $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $y = (y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont deux suites réelles, on pose :
$$D(x,y) := \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{2^k} d(x_k, y_k)$$
Montrer que D est bien définie et que c'est une distance sur $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.
3. Quel est le diamètre de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ pour cette distance ?

Exercice 7. On se place dans $X :=]0,1] \cup \{2\}$ vu comme sous-espace métrique de $\mathbb{R}$ usuel. *Dans cet espace* X, les ensembles $]0,1]$, $\{2\}$, $]0,1/2[$, $]0,1/2]$ sont-ils ouverts, fermés ?

Exercice 8. On considère $E = C^0([0,1],\mathbb{R})$ avec les distances d_1 et d_∞.

1. Montrer que $\|f\|_1 \leq \|f\|_\infty$. En déduire que la boule $B_{d_1}(0_E, 1)$ est ouverte dans (E, d_∞).
2. Construire une suite de fonctions $f_n \in E$ telle que $\|f_n\|_1 \to 0$ quand n tend vers l'infini, tout en vérifiant $\|f\|_\infty = 1$. En déduire que la boule $B_{d_\infty}(0_E, 1)$ n'est pas ouverte dans (E, d_1).
3. Que peut-on en déduire sur les distances d_1 et d_∞ ?

Exercice 9. On considère $\mathbb{R}^2$ muni de la distance euclidienne d_2. Pour $x, y \in \mathbb{R}^2$, on pose :
$$\delta(x,y) = \begin{cases} d_2(x,y) & \text{si } x \text{ et } y \text{ sont colinéaires} \\ d_2(x, 0_{\mathbb{R}^2}) + d_2(0_{\mathbb{R}^2}, y) & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Montrer que δ est une distance sur $\mathbb{R}^2$.
2. Décrire géométriquement les boules $B_\delta(0_{\mathbb{R}^2}, r)$ pour $r > 0$.
3. Si a n'est pas l'origine $0_{\mathbb{R}^2}$, décrire géométriquement les boules $B_\delta(a, r)$ lorsque $0 < r \leq \|a\|$ puis lorsque $r > \|a\|$.
4. Trouver une suite de points du plan qui converge pour la distance euclidienne mais qui ne converge pas pour la distance δ.
5. Les distances d_2 et δ sont-elles équivalentes ?
6. La distance δ provient-elle d'une norme N sur $\mathbb{R}^2$?

Exercice 10. Soit (X, d) un espace métrique. On pose $\delta(x,y) := \min(1, d(x,y))$ pour $x, y \in X$.

1. Montrer que δ est une distance sur X.
2. Montrer que d et δ définissent les mêmes ouverts.

Exercices supplémentaires

Exercice 11. On rappelle qu'une distance sur X est une fonction $d : X\times X \to \mathbb{R}_+$ vérifiant les quatre conditions : (i) $d(x,x)=0$ quel que soit x ; (ii) $d(x,y)>0$ quels que soient x,y distincts ; (iii) $d(x,y)=d(y,x)$ quels que soient x,y ; (iv) $d(x,z)\leq d(x,y)+d(y,z)$ quels que soient x,y,z. Pour voir que ces conditions sont indépendantes, trouver dans chacun des cas suivants un ensemble X et une fonction positive d...

1. ...vérifiant tout sauf (i).
2. ...vérifiant tout sauf (ii).
3. ...vérifiant tout sauf (iii).
4. ...vérifiant tout sauf (iv).

Exercice 12.
1. Soient $a,b,c\in\mathbb{R}$ tels que $a\lambda^2+b\lambda+c\geq 0$ quel que soit $\lambda\in\mathbb{R}$. Que pensez-vous du signe de b^2-4ac ?
2. Soient $x_1,\dots,x_n,y_1,\dots,y_n$ des nombres réels. La somme $\sum_{i=1}^n (x_i-\lambda y_i)^2$ peut s'écrire $a\lambda^2+b\lambda+c$ en la développant, et elle est bien sûr positive. Qui sont a, b, c ? Montrer que la question précédente démontre l'**inégalité de Cauchy-Schwarz** :
$$\left|\sum_{i=1}^n x_i y_i\right| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}\sqrt{\sum_{i=1}^n y_i^2} \tag{2}$$
3. En déduire l'**inégalité de Minkowski** pour l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$:
$$\sqrt{\sum_{i=1}^n (a_i+b_i)^2} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2}+\sqrt{\sum_{i=1}^n b_i^2} \tag{3}$$
où $a_1,\dots,a_n,b_1,\dots,b_n\in\mathbb{R}$.
4. En déduire l'inégalité triangulaire dans l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$:
$$\forall x,y,z\in\mathbb{R}^n,\quad d_2(x,z)\leq d_2(x,y)+d_2(y,z) \tag{4}$$

Exercice 13. Soit (X,d) un espace métrique. On se donne une fonction $\phi : [0,+\infty[\to[0,+\infty[$ strictement croissante telle que $\phi(0)=0$ et $\phi(x+y)\leq\phi(x)+\phi(y)$ pour tous $x,y\in[0,+\infty[$. Montrer qu'alors la fonction $D:=\phi\circ d$ est également une distance sur X.

Exercice 14. On considère l'ensemble X des suites $x=(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de nombres réels. Pour $x,y\in X$, on pose $d(x,y)=0$ si $x=y$, et $d(x,y)=\dfrac{1}{\min\{n\in\mathbb{N}\mid x_n\neq y_n\}}$ si $x\neq y$.

1. Soient x,y,z trois suites deux à deux distinctes. Montrer que
$$\min\{n\mid z_n\neq x_n\}\geq\min\left\{\min\{n\mid x_n\neq y_n\},\min\{n\mid y_n\neq z_n\}\right\}.$$

2. En déduire que $d(x, z) \leq \max\{d(x, y), d(y, z)\}$. En déduire que d est une distance ultramétrique sur X.

Exercice 15. Soit p un nombre premier fixé. Pour tout nombre entier non nul n, on note $v_p(n)$ l'exposant de p dans la décomposition de n en facteurs premiers. Par exemple, $v_3(18) = 2$ et $v_5(18) = 0$.

1. Montrer que $v_p(nn') = v_p(n) + v_p(n')$ quels que soient $n, n' \in \mathbb{N}^*$.
2. En déduire que, pour un nombre rationnel $r = \pm\frac{m}{n}$ avec $m, n \in \mathbb{N}^*$, la quantité $v_p(r) := v_p(m) - v_p(n)$ ne dépend pas de l'écriture de r comme fraction.
3. Par exemple, combien valent $v_2(2)$, $v_2(1/2)$, $v_2(3/5)$?
4. Montrer que $v_p(rs) = v_p(r) + v_p(s)$ quels que soient $r, s \in \mathbb{Q}^*$. En supposant de plus que $r - s \neq 0$, montrer que $v_p(r - s) \geq \min(v_p(r), v_p(s))$.

La **distance** p-**adique** entre deux nombres rationnels $x, y \in \mathbb{Q}$ est définie par $d(x, y) := p^{-v_p(x-y)}$ si $x \neq y$, et $d(x, x) := 0$. Par exemple, vérifier que $d_3(2, 252) = 1$ et $d_5(2, 252) = 1/5^3$.

5. Montrer que d_p est une distance ultramétrique sur $\mathbb{Q}$.
6. Montrer que d_p est une distance ultramétrique sur $\mathbb{Q}$.
7. Montrer que la suite $x_1 = 3$, $x_2 = 33$, $x_3 = 333$ etc. converge vers $-1/3$ dans $(\mathbb{Q}, d_5)$.