Compléments d'Analyse : Topologie de $\mathbb{R}^n$

T. Delcroix

2019–2020

Table des matières

Chapitre 1

Suites réelles et topologie de $\mathbb{R}$

1.1 Convergence des suites réelles et complétude de $\mathbb{R}$

1.1.1 L'espace des nombres réels

On ne donnera *pas* dans ce cours de construction mathématique de l'espace des nombres réels. On pars de ce que vous connaissez : $(\mathbb{R}, +, \times)$ est un corps, muni de plus de la relation d'ordre usuelle, ou de manière équivalent, de la notion de nombre positif et strictement positif. On admet par ailleurs la propriété fondamentale suivante :

Théorème 1.1.1 (Propriété de la borne sup (admise))**.** *Soit A une partie majorée de $\mathbb{R}$, alors il existe un (unique) plus petit majorant de A, noté* $\sup A$ *et appelé la* borne supérieure *de A.*

Rappels de terminologie :
— Une *partie* de $\mathbb{R}$ est un sous-ensemble de l'ensemble $\mathbb{R}$,
— $M \in \mathbb{R}$ est un *majorant* de A si pour tout élément a de A, $a \leq M$,
— la partie $A \subset \mathbb{R}$ est *majorée* s'il existe au moins un majorant de A.

On peut aussi reformuler la définition de la borne sup avec des quantificateurs comme suit. Soit A une partie majorée de $\mathbb{R}$. Alors $\sup A$ est l'unique réel qui satisfait les deux propriétés :

1. $\forall a \in A$, $a \leq \sup A$,
2. $\forall M \in \mathbb{R}$, $(\forall a \in A, a \leq M) \Rightarrow \sup A \leq M$.

Exemple 1.1.2.

1. Si $A = \{a\}$ est un singleton, alors $\sup A = \{a\}$.
2. Si $A = [0, 1]$ ou $A = [0, 1[$ alors $\sup A = 1$.

Si A n'est pas majoré, on pose $\sup A = +\infty$.

Corollaire 1.1.3. *Soit $A \subset \mathbb{R}$ une partie minorée. Alors il existe un (unique) plus grand minorant de A, noté* $\inf A$.

Démonstration. On considère la partie $B = \{-a \mid a \in A\}$. C'est une partie majorée de $\mathbb{R}$ et pour tout minorant m de A, $-m$ est un majorant de B. Par conséquent, $-\sup B$ est le plus grand minorant de A. □

Proposition 1.1.4 (admise)**.** *Pour tout nombre réel $x \in \mathbb{R}$, il existe une partie $A \subset \mathbb{R}$ telle que $x = \sup A$ et $A \subset \mathbb{Q}$.*

Remarque 1.1.5. C'est même comme ça qu'on peut construire $\mathbb{R}$, avec des parties de $\mathbb{Q}$ particulières appelées *coupures de Dedekind.*

1.1.2 Première application de la borne sup

Théorème 1.1.6. *Soit* (u_n) *une suite réelle majorée et croissante. Alors* (u_n) *converge, quand* $n \to \infty$*, vers* $\sup\{u_n \mid n \in \mathbb{N}\}$.

Démonstration. Notons $l = \sup\{u_n \mid n \in \mathbb{N}\}$. On a en particulier $u_n \leq l$ pour tout n. Soit $\epsilon > 0$ un réel strictement positif. Comme $l - \epsilon < l$, $l - \epsilon$ n'est *pas* un majorant de $\{u_n \mid n \in \mathbb{N}\}$, donc il existe un entier n_0 tel que $l - \epsilon \leq u_{n_0}$. Or (u_n) est croissante, donc on a, pour tout n supérieur ou égal à n_0,

$$l - \epsilon \leq u_n \leq l.$$

On a donc prouvé que (u_n) converge vers l. □

Remarque 1.1.7.
- Dans le cas d'une suite (u_n) croissante mais non majorée, (u_n) tend vers $+\infty$, qui est aussi $\sup\{u_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ par définition.
- Une suite décroissante tend vers $\inf\{u_n \mid n \in \mathbb{N}\}$, qui est un réel si la suite est minorée, et égal à $-\infty$ sinon.

1.1.3 Valeurs d'adhérence d'une suite, $\limsup$ et $\liminf$

Rappel de définition : soit (u_n) une suite réelle.

- On appelle *suite extraite* (ou *sous-suite*) de (u_n) toute suite réelle (v_n) telle qu'il existe une application $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante avec
$$v_n = u_{\phi(n)}$$
pour tout n.
- Si $(u_{\phi(n)})$ est une sous-suite de (u_n) et si $(u_{\phi(n)})$ converge vers une limite finie $l \in \mathbb{R}$, on dit que l est une *valeur d'adhérence* de la suite (u_n).

On peut aussi admettre les valeurs $\pm\infty$ comme valeurs d'adhérence si on veut. **Exercice** : montrer qu'une suite admet $+\infty$ comme valeur d'adhérence si et seulement si elle n'est pas majorée.

On va utiliser deux candidats remarquables pour des valeurs d'adhérence. Avant ça :

Remarque 1.1.8. Si (u_n) est une suite réelle majorée, alors la suite (v_n) définie par $v_n = \sup\{u_k \mid k \geq n\}$ est une suite *décroissante*. En particulier, la limite $\lim v_n \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ est bien définie.

Définition 1.1.9. Soit (u_n) une suite réelle. On pose

$$\limsup_{n \to +\infty} u_n = \lim_{n \to \infty} \sup\{u_k \mid k \geq n\} \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$$

et

$$\liminf_{n \to +\infty} u_n = \lim_{n \to \infty} \inf\{u_k \mid k \geq n\} \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}.$$

(Si (u_n) est majorée, $\limsup u_n$ est bien définie par la remarque précédente, sinon $\sup\{u_k \mid k \geq n\} = +\infty$ pour tout n, donc $\limsup_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.)

Proposition 1.1.10. *On a* $\liminf_{n \to +\infty}(-u_n) = -\limsup_{n \to +\infty} u_n$.

Démonstration. En exercice, même principe que pour passer de sup à inf. □

Théorème 1.1.11. *Soit* (u_n) *une suite réelle majorée. Alors* $\limsup_{n \to +\infty} u_n$ *est la plus grande valeur d'adhérence de* u_n.

Démonstration. Il y a deux parties dans l'énoncé :

1. $\limsup u_n$ est une valeur d'adhérence,
2. pour toute valeur d'adhérence y de (u_n), $\limsup u_n \geq y$.

Commençons par le deuxième point. Soit $(u_{\phi(n)})$ une suite extraite convergente vers y. On a $u_{\phi(n)} \leq \sup\{u_k \mid k \geq \phi(n)\}$ donc par passage à la limite, $y \leq \limsup u_n$.

Pour le premier point, on construit inductivement une fonction strictement croissante $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$. Pour cela on commence par poser arbitrairement $\phi(0) = 0$. Si $\phi(n)$ est construit, alors on choisit $\phi(n+1)$ l'un des éléments de n tel que

— $\phi(n+1) > \phi(n)$ et

— $u_{\phi(n+1)} \geq \sup\{u_k \mid k \geq \phi(n)+1\} - \frac{1}{n+1}$.

Un tel élément existe par définition de la borne sup : la borne sup est le plus petit des majorants. Alors

$$\sup\{u_k \mid k \geq \phi(n)+1\} - \frac{1}{n+1} \leq u_{\phi(n+1)} \leq \sup\{u_k \mid k \geq \phi(n)+1\}$$

donc par encadrement, $\lim_{n\to\infty} u_{\phi(n)} = \limsup_{n\to\infty} u_n$, ce qui réalise la limsup comme une valeur d'adhérence. □

De même, on peut montrer le théorème suivant.

Théorème 1.1.12. *Si (u_n) est minorée, alors $\liminf u_n$ est la plus petite valeur d'adhérence de (u_n).*

Théorème 1.1.13. *Une suite réelle (u_n) converge dans $\mathbb{R}$ si et seulement si $\limsup u_n = \liminf u_n \in \mathbb{R}$.*

Démonstration.

— Toutes les valeurs d'adhérence d'une suite convergente coïncident avec la limite.

— Réciproquement, supposons $\limsup u_n = \limsup u_n = l \in \mathbb{R}$. Alors par définition de la limsup, il existe un rang N_1 tel que pour tout $n \geq N_1$,

$$\sup\{u_k \mid k \geq n\} \leq l + \epsilon.$$

De même, il existe un rang N_2 tel que pour tout $n \geq N_2$,

$$\inf\{u_k \mid k \geq n\} \geq l - \epsilon.$$

Donc pour $n \geq \max(N_1, N_2)$, on a

$$l - \epsilon \leq \inf\{u_k \mid k \geq n\} \leq u_n \leq \sup\{u_k \mid k \geq n\} \leq l + \epsilon.$$

On a ainsi montré que u_n converge vers l.

□

Remarque 1.1.14. Pour les limites infinies, on a les caractérisations suivantes en terme de lim sup et lim inf. On a $\lim u_n = +\infty$ si et seulement si $\liminf u_n = +\infty$. Dans ce cas, on a bien sûr aussi $\limsup u_n = +\infty$. Et on a $\lim u_n = -\infty$ si et seulement si $\limsup u_n = -\infty$. Dans ce cas, on a aussi $\liminf u_n = -\infty$. Attention, $\liminf u_n = -\infty$ seul ne permet pas de dire si u_n tend vers $-\infty$, mais seulement d'affirmer que (u_n) n'est pas minorée.

1.1.4 Suites de Cauchy et complétude

Rappel de définition : une suite réelle (u_n) est *de Cauchy* si pour tout $\epsilon > 0$, il existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tous m, $n \geq n_0$, $|u_m - u_n| < \epsilon$.

Théorème 1.1.15 (Complétude de $\mathbb{R}$)**.** *Toute suite de Cauchy dans $\mathbb{R}$ converge dans $\mathbb{R}$.*

Démonstration. Soit (u_n) une suite de Cauchy. On commence par montrer que (u_n) est bornée. Par définition, pour $\epsilon = 1$, on peut trouver un $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $m, n \geq n_0$, $|u_m - u_n| < 1$. En particulier, pour tout $n \geq n_0$, $|u_n| < |u_{n_0}| + 1$. On a donc pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$|u_n| \leq \max\{|u_0|, \ldots, |u_{n_0-1}|, |u_{n_0}| + 1\}.$$

En particulier, (u_n) est bornée.

Comme conséquence de ce fait, $\limsup u_n$ et $\liminf u_n$ sont deux valeurs d'adhérence finies de (u_n).

Soit x une valeur d'adhérence finie de (u_n) (par exemple $\limsup u_n$ grâce au raisonnement ci-dessus). Nous allons maintenant montrer que (u_n) converge vers x. Soit $\epsilon > 0$.

Soit $(u_{\phi(n)})$ une suite extraite qui converge vers x. Par définition, on peut donc trouver un $n_1 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_1$,

$$|u_{\phi(n)} - x| < \epsilon/2.$$

Puisque (u_n) est de Cauchy, on peut par ailleurs trouver un $n_2 \in \mathbb{N}$ tel que pour m, $n \geq n_2$, on ait

$$|u_m - u_n| < \epsilon/2.$$

On en déduit que, pour $n \geq \max(n_1, n_2)$, on a

$$\begin{aligned} |u_n - x| &\leq |u_n - u_{\phi(n_0)}| + |u_{\phi(n_0)} - x| \\ &< \epsilon/2 + \epsilon/2 \\ &< \epsilon \end{aligned}$$

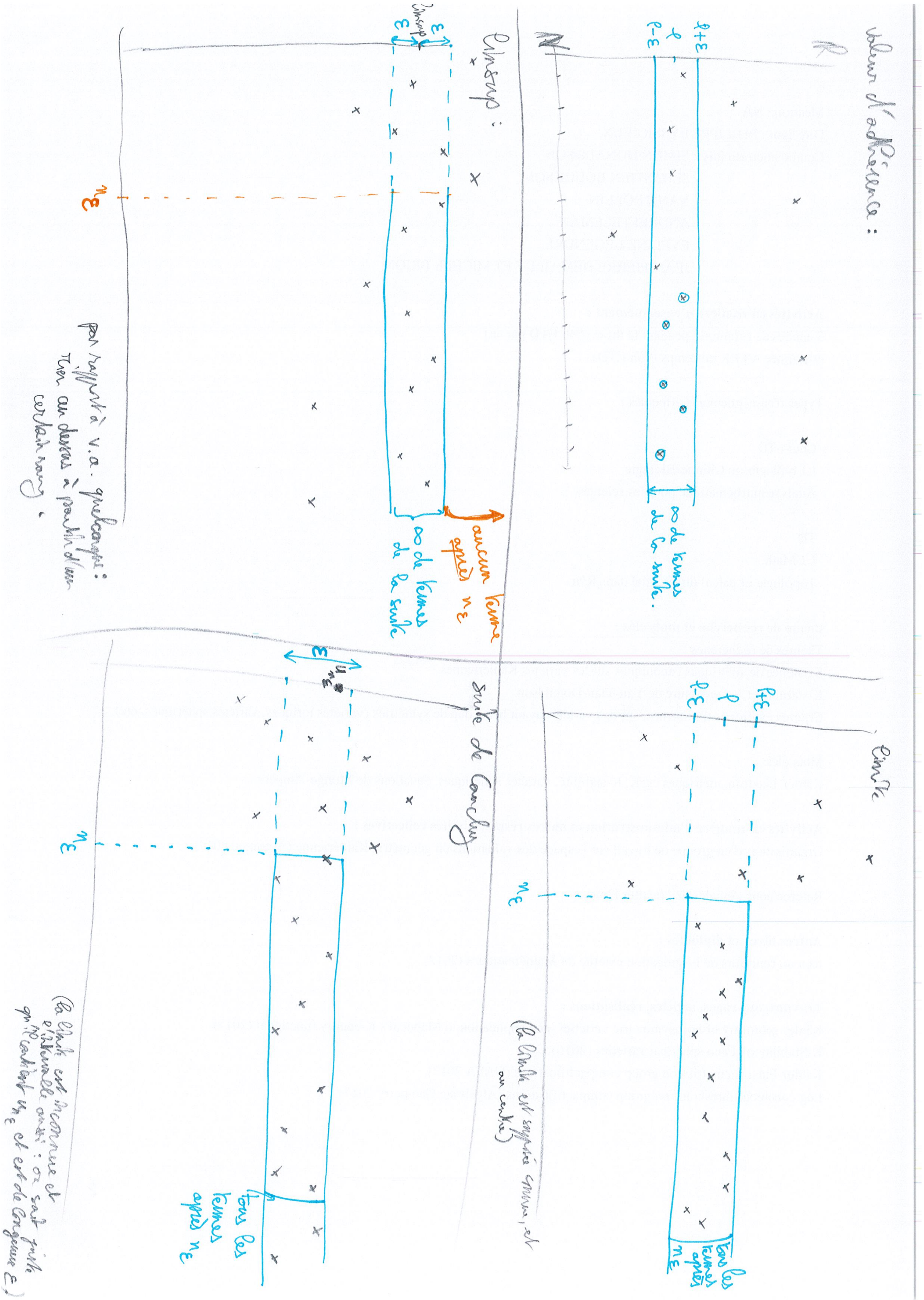
ce qui termine la preuve de la convergence de (u_n). □

Théorème 1.1.16 (Incomplétude de $\mathbb{Q}$)**.** *Il existe des suites (u_n) de Cauchy avec $u_n \in \mathbb{Q}$ pour tout n, qui ne convergent pas vers un élément de $\mathbb{Q}$.*

C'est vrai en prenant n'importe quelle suite dans $\mathbb{Q}$ qui converge vers un nombre irrationnel. Une telle suite existe pour tout rationnel, par exemple en utilisant la propriété admise au début de ce cours : tout réel est la borne sup d'un ensemble de nombres rationnels.

Exemple 1.1.17. Rappelons par exemple pourquoi $\sqrt{2}$ n'est pas rationnel.

Démonstration. Par l'absurde, supposons $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$ avec a, $b \in \mathbb{Z}$ premiers entre eux. En passant au carré, on a $2b^2 = a^2$, donc a^2 est pair. Ceci implique que a aussi est pair. Notons $a = 2k$. En réinjectant, on a ainsi $2b^2 = 4k^2$, donc $b^2 = 2k^2$. Cette fois-ci, cela implique que b^2, donc b, sont pairs. Alors 2 est un diviseur commun à a et b, ce qui contredit l'hypothèse que a et b sont premiers entre eux. □


valeur d'adhérence :
R
N
ℓ+ε
ℓ
ℓ−ε
∞ de termes de la suite.
limite
tous les termes après n_ε
n_ε
(la limite est supposée connue, et au centre)
limsup :
ε
limsup
aucun terme après n_ε
∞ de termes de la suite
par rapport à v.a. quelconque : rien au dessus à partir d'un certain rang.
suite de Cauchy
u_{n_ε}
tous les termes après n_ε
(la limite est inconnue et l'intervalle aussi : on sait juste qu'il contient u_{n_ε} et est de longueur ε)

1.2 Propriétés topologiques des parties de $\mathbb{R}$

1.2.1 Ouverts de $\mathbb{R}$

On commence par une notion préliminaire, qui va servir à tout définir, et dont une généralisation naturelle marchera pour $\mathbb{R}^n$.

Définition 1.2.1. Soit $x \in \mathbb{R}$. Une partie A de $\mathbb{R}$ est un voisinage de x s'il existe un réel strictement positif $r > 0$ tel que $]x-r, x+r[\subset A$.

Exemple 1.2.2.

Partie de $\mathbb{R}$	Voisinage de 0 ?
$\mathbb{R}$	oui
$\{0\}$	non
$]0,1[$	non
$[0,1]$	non
$]-1,1[$	oui
$]-1,0[\cup]0,1[$	non
$[-1/n, 1/n]$ $n \in \mathbb{N}$	oui
$]-1,3]$	oui
$[-10,+\infty[$	oui
$\{1/n \mid n \in \mathbb{N}^*\}$	non

Définition 1.2.3. Une partie $A \subset \mathbb{R}$ est *ouverte* si pour tout $a \in A$, A est un voisinage de a.

On dira aussi : A est un ouvert de $\mathbb{R}$.
Avec des quantificateurs, la définition s'écrit (attention à l'ordre)

$$\forall a \in A, \exists r \in \mathbb{R}_+^*,]x-r, x+r[\subset A.$$

Exemple 1.2.4.

Partie de $\mathbb{R}$	Ouvert ?
$\mathbb{R}$	oui
$\{0\}$	non
$]0,1[$	oui
$[0,1]$	non
$]-1,1[$	oui
$]-1,0[\cup]0,1[$	oui
$[-1/n, 1/n]$ $n \in \mathbb{N}$	non
$]-1,3]$	non
$[-10,+\infty[$	non
$\{1/n \mid n \in \mathbb{N}^*\}$	non

Proposition 1.2.5. *Soient $a < b \in \mathbb{R}$. L'intervalle ouvert $]a,b[\subset \mathbb{R}$ est ouvert.*

Démonstration. Soit $x \in]a,b[$. Posons $r = \min(b-x, x-a)$. On a $r \in \mathbb{R}_+^*$, et

$$a \leq x-r < x < x+r \leq b$$

donc $]x-r, x+r[\subset]a,b[$. □

Exercice 1. Montrer que, si $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$, alors les intervalles ouverts $]a,+\infty[$, $]-\infty, b[$ et $\mathbb{R} =]-\infty,+\infty[$ sont aussi des parties ouvertes de $\mathbb{R}$.

Proposition 1.2.6. *1. Soit $(U_i)_{i\in I}$ une famille d'ouverts $U_i \subset \mathbb{R}$, indexée par un ensemble quelconque I. Alors $\bigcup_{i\in I} U_i$ est un ouvert de $\mathbb{R}$.*

2. *Soient* $U_1, \dots, U_n$ *un nombre* fini *d'ouverts de* $\mathbb{R}$. *Alors* $U_1 \cap U_2 \cap \dots \cap U_n$ *est un ouvert de* $\mathbb{R}$.

Démonstration. La première propriété est immédiate par définition. En effet, soit $a \in \bigcup_{i\in I} U_i$. Alors il existe un $i \in I$ tel que $a \in U_i$. Or U_i est ouvert, donc il existe un réel strictement positif r tel que

$$]a-r, a+r[\subset U_i \subset \bigcup_{j\in I} U_j.$$

Donc $\bigcup_{i\in I} U_i$ est ouvert.

Pour la seconde propriété, soit $a \in U_1 \cap U_2 \cap \dots \cap U_n$. Pour chaque $i \in \{1, \dots, n\}$, $a \in U_i$ et U_i est ouvert, donc il existe $r_i > 0$ tel que $]a - r_i, a + r_i[\subset U_i$. Posons $r = \min\{r_1, \dots, r_n\}$. Alors on a

$$]a-r, a+r[\subset \bigcap_{i=1}^{n}]a-r_i, a+r_i[\subset \bigcap_{i=1}^{n} U_i$$

Donc $U_1 \cap U_2 \cap \dots \cap U_n$ est ouvert. □

Remarque : c'est faux pour une intersection quelconque. En effet la preuve ne marche plus car pour une famille infinie de réels strictement positifs $(r_i)_{i\in I}$, on peut très bien avoir $\inf\{r_i \mid i \in I\} = 0$. Par ailleurs, il y a des contre-exemples. Pour un contre-exemple explicite, on peut considérer les ouverts $]-1/n, 1/n[$ pour $n \in \mathbb{N}^*$. On a alors

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}^*}]-1/n, 1/n[= \{0\}$$

(exercice) qui n'est pas ouvert.

Remarque 1.2.7. Par définition, tout ouvert de $\mathbb{R}$ est une réunion d'intervalles ouverts. En effet, si A est ouvert, choisissons pour tout $a \in A$ un réel strictement positif r_a tel que $]a - r_a, a + r_a[\subset A$. Alors on a par double inclusion immédiate,

$$A = \bigcup_{a\in A}]a - r_a, a + r_a[.$$

En fait, on peut écrire tout ouvert de $\mathbb{R}$ comme réunion *dénombrable* d'intervalles ouverts *disjoints* (Exercice difficile).

Définition 1.2.8. Soit $A \subset \mathbb{R}$ une partie quelconque. On appelle *intérieur* de A, et on note $\mathring{A}$, le plus grand ouvert de $\mathbb{R}$ qui contient A.

Remarque 1.2.9. — Pour montrer son existence, et le décrire, il suffit de remarquer que

$$\mathring{A} = \bigcup \{U \mid U \text{ ouvert} \subset A\}$$

— L'ensemble A est ouvert si et seulement si $\mathring{A} = A$.

Proposition 1.2.10. *L'intérieur de* A *est l'ensemble des points* $a \in A$ *tels que* A *soit un voisinage de* a.

Démonstration. — Comme $\mathring{A}$ est ouvert, $\mathring{A}$ est voisinage de tout $a \in \mathring{A}$. Or $\mathring{A} \subset A$, donc A est voisinage de tout $a \in \mathring{A}$.

— Réciproquement, soit $a \in A$ tel que A soit un voisinage de a. Soit r un réel strictement positif tel que $]a - r, a + r[\subset A$. Alors $]a - r, a + r[$ est un ouvert contenu dans $\mathring{A}$ donc $]a - r, a + r[\subset \mathring{A}$ par définition de l'intérieur, et donc en particulier, $a \in \mathring{A}$.

□

Exemple 1.2.11. $\overset{\circ}{\overbrace{[1,2]}} =]1,2[= \overset{\circ}{\overbrace{[1,2[}} = \overset{\circ}{\overbrace{]1,2[}}$, $\overset{\circ}{\overbrace{\{0\}}} = \emptyset$, $\mathring{\mathbb{R}} = \mathbb{R}$.

1.2.2 Fermés de $\mathbb{R}$

Définition 1.2.12. Une partie A de $\mathbb{R}$ est *fermée* si son complémentaire $\mathbb{R} \setminus A$ est une partie ouverte de $\mathbb{R}$.

Autrement dit, A est fermé si

$$\forall a \in \mathbb{R} \setminus A, \exists r \in \mathbb{R}_+^*,]a-r, a+r[\subset \mathbb{R} \setminus A.$$

Exemple 1.2.13.
- Un segment $[a, b]$, avec $a \leq b \in \mathbb{R}$ est fermé, car $\mathbb{R} \setminus [a, b] =]-\infty, a[\cup]b, +\infty[$ est une réunion d'intervalles ouverts, donc est une partie ouverte de $\mathbb{R}$.
- De même, les intervalles de la forme $]-\infty, b]$ et $[a, +\infty[$ sont fermés.

Proposition 1.2.14.
1. *Soit $(F_i)_{i\in I}$ une famille de fermés de $\mathbb{R}$, indexée par un ensemble quelconque I. Alors $\bigcap_{i\in I} F_i$ est un fermé de $\mathbb{R}$.*
2. *Soient $F_1, \dots, F_n$ des fermés (en nombre fini), alors $F_1 \cup \dots \cup F_n$ est un fermé de $\mathbb{R}$.*

Démonstration. Les deux propriétés découlent de la proposition correspondente pour les ouverts, en notant que

$$\mathbb{R} \setminus \left(\bigcap_{i\in I} F_i\right) = \bigcup_{i\in I} (\mathbb{R} \setminus F_i)$$

et

$$\mathbb{R} \setminus (F_1 \cup \dots \cup F_n) = (\mathbb{R} \setminus F_1) \cup \dots \cup (\mathbb{R} \setminus F_n).$$

□

Remarque 1.2.15. Là encore, c'est faux pour une réunion infinie en général. Par exemple, $\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} [-1, -1/n] = [-1, 0[$ qui n'est pas fermé.

Théorème 1.2.16 (Définition séquentielle des fermés)**.** *Une partie B de $\mathbb{R}$ est fermée si et seulement si pour toute suite réelle convergente (u_n) à valeurs dans B, la limite de (u_n) est un élément de B.*

Démonstration. Supposons d'abord que B est fermé, c'est-à-dire que $\mathbb{R} \setminus B$ est ouvert. Soit (u_n) une suite à valeur dans B, et supposons que (u_n) converge vers une limite $l \in \mathbb{R} \setminus B$ (on raisonne par l'absurde ici). Alors comme $\mathbb{R} \setminus B$ est ouvert, il existe un réel strictement positif r tel que $]l - r, l + r[\subset \mathbb{R} \setminus B$. C'est une contradiction avec $\lim u_n = l$ et $u_n \in B$ pour tout n.

Supposons maintenant que $\mathbb{R} \setminus B$ n'est pas ouvert. Construisons une suite (u_n) à valeurs dans B, qui converge vers un élément de $\mathbb{R}\setminus B$. Comme $\mathbb{R}\setminus B$ n'est pas ouvert, il existe $l \in \mathbb{R}\setminus B$ tel que pour tout $r > 0$, $]l - r, l + r[\cap B \neq \emptyset$. On construit alors (u_n) en choisissant, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, un élément $u_n \in]l - 1/n, l + 1/n[\cap B$. Par construction, (u_n) converge vers l et prouve le résultat. □

Définition 1.2.17. Soit $A \subset \mathbb{R}$ une partie quelconque. On appelle *adhérence* de A, et on note $\bar{A}$, le plus petit fermé de $\mathbb{R}$ contenant A.

Remarque 1.2.18.
- Pour montrer son existence et le décrire, il suffit de remarquer que

$$\bar{A} = \bigcap \{F \mid F \text{ fermé} \supset A\}$$

- La partie A est fermée si et seulement si $\bar{A} = A$.

Proposition 1.2.19. *L'adhérence $\bar{A}$ de A est l'ensemble des points de $\mathbb{R}$ qui sont limites d'une suite à valeurs dans A.*

Démonstration.
— Si B est un fermé contenant A (par exemple $\bar{A}$) alors par la caractérisation séquentielle des fermés, B contient toutes les limites de suites réelles convergentes à valeurs dans A.
— On montre l'autre inclusion par l'absurde. Soit $x \in \bar{A}$ qui n'est pas limite d'une suite à valeurs dans A. Alors il existe un $\epsilon > 0$ tel que $]x - \epsilon, x + \epsilon[\subset \mathbb{R} \setminus A$, donc le fermé $\mathbb{R} \backslash]x - \epsilon, x + \epsilon[$ contient A. Par définition de $\bar{A}$, on a donc $\bar{A} \subset \mathbb{R} \backslash]x - \epsilon, x + \epsilon[$ et c'est une contradiction avec $x \in \bar{A}$.

□

Exemple 1.2.20. On a par exemple $\overline{]1, 2[} = \overline{[1, 2[} = \overline{[1, 2]} = [1, 2]$, $\overline{\{0\}} = \{0\}$, $\bar{\mathbb{R}} = \mathbb{R}$, etc.

Remarque 1.2.21. Les parties $\mathbb{R}$ et $\emptyset$ sont à la fois ouvertes et fermées. Existe-t-il d'autres parties de $\mathbb{R}$ qui soient à la fois ouvertes et fermées ?

1.2.3 Compacité

Définition 1.2.22. Une partie A de $\mathbb{R}$ est *compacte* si pour toute suite (u_n) à valeurs dans A, il existe une sous-suite $(u_{\phi(n)})$ qui converge vers un élément de A.

La définition donnée ici est par la propriété de Bolzano-Weierstrass. On va montrer que dans $\mathbb{R}$, une caractérisation des compacts est donnée par la propriété d'être à la fois fermé et borné. Dans le cas d'un espace topologique général, la bonne définition est plutôt obtenue par la propriété de Borel-Lebesgue, dont nous ne parlerons pas dans ce cours.

Proposition 1.2.23. *Soit A une partie compacte de $\mathbb{R}$, alors A est fermée.*

Démonstration. Soit (u_n) une suite à valeurs dans A, convergente, de limite $l \in \mathbb{R}$. Par compacité, il existe une sous-suite $(u_{\phi(n)})$ qui converge vers un élément de A. Puisque (u_n) est convergente, la sous-suite $(u_{\phi(n)})$ converge vers la même limite l. Donc $l \in A$. On a ainsi vérifié par la définition que A est fermée. □

Proposition 1.2.24. *Soit A une partie compacte de $\mathbb{R}$, alors A est bornée.*

Démonstration. On raisonne par l'absurde. Supposons par exemple que A n'est pas minorée. Alors on peut construire une suite (u_n) d'éléments de A avec $u_n \leq -n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. En particulier, (u_n) tend vers $-\infty$ et $\limsup u_n = -\infty$. On en déduit que (u_n) n'admet aucune valeur d'adhérence finie. C'est une contradiction avec la compacité. Le cas où A est minorée mais pas majorée se traite de la même manière en construisant une suite qui tend vers $+\infty$. □

Théorème 1.2.25. *Une partie de $\mathbb{R}$ est compacte si et seulement si elle est fermée et bornée.*

Démonstration. Étant donné les deux propositions précédentes, il reste seulement à montrer qu'une partie fermée et bornée est compacte. Supposons que A est une partie fermée et bornée de $\mathbb{R}$. Soit (u_n) une suite à valeurs dans A. En particulier, elle est bornée, donc elle admet des valeurs d'adhérences finies dans $\mathbb{R}$ (par exemple $\limsup u_n$). Soit $(u_{\phi(n)})$ une sous-suite de u_n qui converge vers $\limsup u_n$. Alors, comme A est fermé, $\limsup u_n \in A$, donc on a bien vérifié la définition de la compacité pour A. □

TD 1 : Suites réelles et topologie de $\mathbb{R}$

Exercice 2.

1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels et l un nombre réel. Rappeler la définition avec des quantificateurs de $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = l$.
2. Soient (u_n) et (v_n) deux suites de nombres réels, de limites respectives $l_u \in \mathbb{R}$ et $l_v \in \mathbb{R}$ en $+\infty$. Quelle est la limite de la suite $(u_n v_n)$? Démontrer ce résultat.
3. On considère la suite (u_n) définie par $u_n = \frac{2n+3}{2n+1}$. Montrer que (u_n) converge vers 1, et pour $\epsilon = 1/10$ et $\epsilon = 1/100$, déterminer le rang n_0 à partir duquel tous les termes de la suite restent dans l'intervalle $[1-\epsilon, 1+\epsilon]$.
4. Quelles sont les valeurs d'adhérences de la suite définie par $u_n = (-1)^n \cdot 3 + 2$?

Exercice 3. On considère la suite (u_n) définie par une donnée initiale $u_0 \geq -2$ et la relation de récurrence $u_{n+1} = F(u_n)$, avec $F(x) = \sqrt{2+x}$.

1. Représenter le graphe de F. Utiliser les diagrammes en toile d'araignée pour deviner le comportement de la suite (u_n) pour $u_0 = -1$, puis $u_0 = 3$.
2. Déterminer les points fixes de F.
3. Pour $u_0 > 2$, montrer que (u_n) est décroissante, et tend vers 2.
4. Donner la limite de (u_n) selon les valeurs de u_0.

Exercice 4.

1. Calculer $\limsup_{n\to\infty}(-1)^n(1+\frac{1}{n})$.
2. Soient (a_n) et (b_n) deux suites réelles. Montrer que
$$\limsup_{n\to\infty}(a_n+b_n) \leq \limsup_{n\to\infty} a_n + \limsup_{n\to\infty} b_n.$$
Trouver un exemple où les inégalités sont strictes.
3. Soit (x_n) une suite d'éléments de $\mathbb{R}$ et soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Montrer que si f est croissante alors
$$f(\limsup_{n\to\infty} x_n) = \limsup_{n\to\infty} f(x_n) \quad \text{et} \quad f(\liminf_{n\to\infty} x_n) = \liminf_{n\to\infty} f(x_n).$$
Que dire si f est décroissante ?

Exercice 5. Rappeler la définition d'une suite de Cauchy. Les suites réelles définies par les relations de récurrence suivantes sont-elles de Cauchy ?

1. $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = u_n + \frac{1}{n+1}$
2. $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = u_n + \frac{1}{2^{n+1}}$

Exercice 6. Parmi les sous-ensembles de $\mathbb{R}$ suivants, lesquels sont ouverts ? fermés ? compacts ? Déterminer leur adhérence et leur intérieur.

$$X_1 = [-1, 2] \qquad X_2 = [-1, 2[$$
$$X_3 = \mathbb{Q} \qquad X_4 = \mathbb{Q} \cap [-1, 1]$$
$$X_5 = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \qquad X_6 = \mathbb{R}^*$$
$$X_7 = \left\{ \frac{1}{n} \mid n > 0 \right\} \qquad X_8 = \left\{ \frac{1}{n} \mid n > 0 \right\} \cup \{0\}$$
$$X_9 = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} \left] 1 - \frac{1}{n}, 1 + \frac{1}{n} \right[\qquad X_{10} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} \left] 1 - \frac{1}{n}, 1 + \frac{1}{n} \right[$$
$$X_{11} = \{x \mid \sin(x) < 1/2\}$$

Exercice 7. Soit A un sous-ensemble non vide de $\mathbb{R}$. On dit que A est **discret** si tous ses points sont *isolés*, c'est-à-dire $\forall a \in A$, $\exists r > 0$, $]a - r, a + r[\cap A = \{a\}$.

1. Donner des exemples de sous-ensembles de $\mathbb{R}$ dénombrables, d'intérieurs vides, fermés et discrets.
2. Montrer qu'une partie discrète de $\mathbb{R}$ est d'intérieur vide.
3. Une partie discrète de $\mathbb{R}$ est-elle nécessairement fermée ?
4. Une partie d'intérieur vide de $\mathbb{R}$ est-elle discrète ?
5. Montrer qu'une partie dénombrable de $\mathbb{R}$ est d'intérieur vide.
6. Une partie d'intérieur vide est-elle dénombrable ?

Exercice 8. Montrer qu'une partie discrète de $\mathbb{R}$ est dénombrable. On pourra utiliser le fait qu'une famille (I_j), $j \in \mathcal{J}$ d'intervalles ouverts non-vides deux à deux disjoints de $\mathbb{R}$ est indexée par un ensemble $\mathcal{J}$ dénombrable (pourquoi ?).

Que pouvez-vous dire d'une partie compacte et discrète de $\mathbb{R}$?

Exercice 9.

1. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue vérifiant $f(x) \to +\infty$ lorsque $|x| \to +\infty$. Montrer que f admet un minimum global sur $\mathbb{R}$.
2. Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$ admettant des limites finies en $+\infty$ et $-\infty$. Montrer que f est uniformément continue.
3. Soit f un fonction continue sur $\mathbb{R}$. Montrer l'équivalence des deux propositions suivantes.
   (a) $\lim_{x \to \pm\infty} |f(x)| = +\infty$.
   (b) L'image réciproque de tout compact par f est compacte.

Exercices complémentaires

Exercice 10.

1. Soit y un réel ≥ -1 et n un entier naturel. Montrer l'inégalité
$$(1+y)^n \geq 1+ny.$$
2. Soit x un réel. On considère les suites $(u_n(x))$ et $(v_n(x))$ définies, pour $n \geq |x|$, par
$$u_n = \left(1+\frac{x}{n}\right)^n \qquad v_n = \left(1-\frac{x}{n}\right)^{-n}$$
Montrer que u_n et v_n sont adjacentes, et rappeler la notation habituelle pour leur limite commune.

Exercice 11.

1. Soit f une fonction continue définie sur un intervalle fermé $I = [a, b]$, telle que $f(I) \subset I$. Montrer que f admet au moins un point fixe dans I, c'est à dire un point x_0 tel que $f(x_0) = x_0$.
2. On suppose à partir de maintenant que f est k-contractante. C'est à dire qu'il existe un réel $k \in]0, 1[$ tel que pour tous x, $y \in I$, on ait $|f(x) - f(y)| \leq k|x - y|$. Montrer qu'elle est continue, et que le point fixe fourni par la question précédente est unique.
3. On s'intéresse maintenant à la suite définie par $u_0 \in \mathbb{R}$ et la relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$.
   (a) Justifier que la suite (u_n) est bien définie.
   (b) Justifier que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on a $|u_{n+1} - u_n| \leq k^n|u_1 - u_0|$.
   (c) Montrer que la suite (u_n) est de Cauchy, et qu'elle admet une limite $l \in I$.
   (d) Montrer que l est le point fixe de f.
   (e) Soit f une fonction dérivable telle que $f(I) \subset I$ et telle qu'il existe $k \in]0, 1[$ avec $|f'(x)| < k$ pour tout x dans I. Montrer que f satisfait les hypothèses de l'exercice.

Exercice 12. Soit f une fonction monotone sur un intervalle I. Montrer que l'ensemble de ses points de discontinuité est dénombrable.

Exercice 13.

1. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue et nulle sur $\mathbb{Q}$. Montrer que f est nulle.
2. * Soit r un réel irrationnel. Montrer que l'ensemble $\mathbb{Z} + \mathbb{N}r$ est dense dans $\mathbb{R}$.
3. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue, 1-périodique et $\sqrt{2}$-périodique. Montrer que f est constante.

Exercice 14. Soit I un segment de $\mathbb{R}$. Soit A un ensemble, et à tout $\alpha \in A$, on associe un intervalle ouvert $J_\alpha \subset \mathbb{R}$. On suppose que $I \subset \bigcup_{\alpha \in A} J_\alpha$.

1. On suppose d'abord A dénombrable. En raisonnant par l'absurde, montrer qu'il existe un sous-ensemble **fini** $B \subset A$ tel que $I \subset \bigcup_{\alpha \in B} J_\alpha$. (On pourra construire une suite d'éléments de I qui évitent de plus en plus d'intervalles J_α.)
2. * Montrer la même propriété dans le cas où A n'est pas supposé dénombrable.

Chapitre 2

Propriétés topologiques des parties de $\mathbb{R}^n$

2.1 Voisinages et propriétés topologiques

2.1.1 Voisinages dans $\mathbb{R}$

En introduisant une notion de voisinage, comme dans $\mathbb{R}$, on va pouvoir définir de manière analogue les propriétés topologiques des parties de $\mathbb{R}^n$. On verra ensuite comment caractériser ces propriétés par les suites.

On rappelle que $\mathbb{R}^n$ est muni de la *norme Euclidienne*, notée $\|\cdot\|$: si $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, alors

$$\|x\| := \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}.$$

En utilisant cette norme, on définit aussi la *distance euclidienne* entre deux points : si $x = (x_1, \ldots, x_n)$ et $y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$, alors

$$d(x, y) := \|y - x\| = \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + \cdots + (y_n - x_n)^2}.$$

Ceci permet de définir des boules dans $\mathbb{R}^n$: si $x \in \mathbb{R}^n$ et $r \in \mathbb{R}_+$, on appelle *boule (euclidienne) ouverte de centre x et de rayon r* l'ensemble

$$\mathring{B}(x, r) := \{y \in \mathbb{R}^n \mid d(x, y) < r\}$$

et *boule (euclidienne) fermée de centre x et de rayon r* l'ensemble

$$B(x, r) := \{y \in \mathbb{R}^n \mid d(x, y) \leq r\}.$$

Exemple 2.1.1. — Si $n = 1$, on a $\mathring{B}(x, r) =]x - r, x + r[$ et $B(x, r) = [x - r, x + r]$.
— Si $n = 2$, les boules sont des disques de centre x et de rayon r. La boule fermée contient le cercle frontière, alors que la boule ouverte ne contient aucun point du cercle frontière.

Définition 2.1.2. Soit $A \subset \mathbb{R}^n$ une partie de $\mathbb{R}^n$ et $a \in \mathbb{R}^n$ un élément de $\mathbb{R}^n$. On dit que A est un *voisinage de a* s'il existe $r \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $\mathring{B}(a, r) \subset A$.

Remarque 2.1.3. — Attention : ici on demande que le rayon de la boule ouverte considérée soit strictement positif. Une boule ouverte de rayon nul est en fait l'ensemble vide, quel que soit le centre. On le garde dans la définition car ça peut simplifier la rédaction à certain moments.
— Par conséquent, si A est un voisinage de a, on a en particulier $a \in A$.
— Dans le cas $n = 1$, on retrouve bien la définition du chapitre précédent.

Exemple 2.1.4. Les boules $\mathring{B}(0, 1)$ et $B(0, 1)$ sont des voisinages de 0.

2.1.2 Propriétés topologiques : définitions

Définition 2.1.5. Soit A une partie de $\mathbb{R}^n$. Alors

— A est *ouvert* si pour tout point $a \in A$, A est voisinage de a ;

— A est *fermé* si $\mathbb{R}^n \setminus A$ est ouvert ;

— A est *borné* s'il existe $M \in \mathbb{R}_+$ tel que $A \subset B(0, M)$;

— A est *compact* si A est fermé et borné.

L'*adhérence* $\bar{A}$ de A est le plus petit fermé de $\mathbb{R}^n$ qui contient A. L'*intérieur* $\mathring{A}$ de A est le plus grand ouvert de $\mathbb{R}^n$ contenant A.

Remarque 2.1.6. Dans $\mathbb{R}$, pour vérifier que l'intérieur et l'adhérence étaient bien définis, on a utilisé la propriété fondamentale des ouverts : *une réunion quelconque d'ouverts est ouverte.* Cette propriété reste vraie dans $\mathbb{R}^n$, et c'est toujours une conséquence directe de la définition : soit $(A_j)_{j \in J}$ une famille d'ouverts de $\mathbb{R}^n$, et $a \in \bigcup_{j \in J} A_j$. Alors il existe un $j_0 \in J$ tel que $a \in A_{j_0}$. Or A_{j_0} est ouvert, donc il existe $r \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $\mathring{B}(a, r) \subset A_{j_0} \subset \bigcup_{j \in J} A_j$. Donc $\bigcup_{j \in J} A_j$ est un voisinage de a et on a ainsi montré que $\bigcup_{j \in J} A_j$ est ouvert.

2.1.3 Exemple fondamental : les boules

On considère dans cette partie les boules ouvertes et fermées $\mathring{B}(0, 1)$ et $B(0, 1)$ de centre 0 et de rayon 1 dans $\mathbb{R}^n$. On va notamment vérifier que la terminologie et les notations sont cohérentes : $\mathring{B}(0, 1)$ est un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $B(0, 1)$ est un fermé, et $\mathring{B}(0, 1)$ est l'intérieur de $B(0, 1)$.

Proposition 2.1.7. *La boule Euclidienne ouverte $\mathring{B}(0, 1)$ est un ouvert de $\mathbb{R}^n$.*

Démonstration. Soit $a \in \mathring{B}(0, 1)$. Posons $r := 1 - \|a\|$. On a $r \in \mathbb{R}_+^*$ car par définition $\|a\| = \|a - 0\| < 1$. Si $y \in \mathring{B}(a, r)$, on a $\|y - a\| < r$ donc par inégalité triangulaire,

$$\|y\| \leq \|y - a\| + \|a\| < r + \|a\| = 1$$

Donc $y \in \mathring{B}(0, 1)$. On a ainsi montré $\mathring{B}(a, r) \subset \mathring{B}(0, 1)$, donc $\mathring{B}(0, 1)$ est un voisinage de a. C'est vrai pour tout $a \in \mathring{B}(0, 1)$ donc $\mathring{B}(0, 1)$ est ouvert. □

Remarque 2.1.8. — On adapte sans mal cette preuve et les suivantes à des boules de centre et rayon quelconque.

— Même dans le cas du rayon nul, on a $\mathring{B}(x, 0) = \emptyset$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, et $\emptyset$ est une partie ouverte.

Proposition 2.1.9. *Soit $a \in \mathbb{R}^n$ tel que $\|a\| = 1$. Alors $a \in B(0, 1)$, mais $B(0, 1)$ n'est pas un voisinage de a. En particulier, $B(0, 1)$ n'est pas ouvert.*

Démonstration. Il s'agit de montrer que, pour n'importe quel $r \in \mathbb{R}_+^*$, la boule $\mathring{B}(a, r)$ n'est pas incluse dans $B(0, 1)$. Étant donné r, on considère $y := (1 + \frac{r}{2})a$. On a $\|y\| = (1 + \frac{r}{2})\|a\| = 1 + \frac{r}{2} > 1$ et $\|y - a\| = \frac{r}{2} < r$ donc $y \in \mathring{B}(a, r) \cap \mathbb{R}^n \setminus B(0, 1)$, ce qui termine la preuve. □

Remarque 2.1.10. Plus généralement, une boule fermée $B(x, r)$ n'est voisinage d'aucun des points de la sphère $S(x, t) = \{y \in \mathbb{R}^n \mid d(y, x) = r\}$.

Proposition 2.1.11. *La boule euclidienne fermée $B(0, 1)$ est un fermé de $\mathbb{R}^n$.*

Démonstration. On a $\mathbb{R}^n \setminus B(0, 1) = \{y \in \mathbb{R}^n \mid d(y, 0) > 1\}$. Soit $a \in \mathbb{R}^n \setminus B(0, 1)$. On veut montrer que $\mathbb{R}^n \setminus B(0, 1)$ est un voisinage de a. Soit $r := \|a\| - 1$. Alors si $d(y, a) < r$, on a par inégalité triangulaire

$$\|a\| \leq \|y\| + \|y - a\| < \|y\| + r$$

donc $\|y\| > \|a\| - r = 1$, c'est-à-dire $y \in \mathbb{R}^n \setminus B(0, 1)$. On a montré ce qu'il fallait. □

Corollaire 2.1.12. *La boule fermée $B(0,1)$ est compacte.*

Exercice 15. La boule ouverte $\mathring{B}(0,1)$ n'est pas fermée.

Proposition 2.1.13. *L'intérieur de $B(0,1)$ est $\mathring{B}(0,1)$.*

Démonstration. Notons $A := B(0,1)$. Comme $\mathring{B}(0,1) \subset A$ et $\mathring{B}(0,1)$ est ouvert, on a $\mathring{B}(0,1) \subset \mathring{A}$. Réciproquement, soit $a \in \mathring{A}$. Comme $\mathring{A}$ est ouvert, $\mathring{A}$ est voisinage de a. Comme $\mathring{A} \subset A$, A est aussi voisinage de a. On a vu précédemment que A n'est voisinage d'aucun point de la sphère $S(0,1)$. Or $B(0,1) = \mathring{B}(0,1) \sqcup S(0,1)$, donc $a \in \mathring{B}(0,1)$. On a ainsi prouvé l'autre inclusion $\mathring{A} \subset \mathring{B}(0,1)$ et l'énoncé de la proposition. □

2.2 Suites et topologie dans $\mathbb{R}^d$

2.2.1 Suites convergentes dans $\mathbb{R}^d$

Définition 2.2.1. Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathbb{R}^d$ converge vers $l \in \mathbb{R}^d$ si

$$\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, \|u_n - l\| < \epsilon.$$

Remarque 2.2.2. $\|u_n - l\| < \epsilon \quad \Leftrightarrow u_n \in \mathring{B}(l,\epsilon)$

On a donc une caractérisation équivalente :

Proposition 2.2.3. *Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathbb{R}^d$ converge vers $l \in \mathbb{R}^d$ si et seulement si pour tout voisinage A de l, il existe un rang $N \in \mathbb{N}$ à partir duquel tous les termes de la suite sont dans A.*

Idée de preuve. $\Leftarrow$: les boules centrées en l sont des voisinages de l
$\Rightarrow$: si A est un voisinage de l, $\exists \epsilon > 0$ tq $\mathring{B}(l,\epsilon) \subset A$. □

Une autre caractérisation équivalente découlant directement de la définition est : (u_n) converge vers l si et seulement si $\|u_n - l\|$ est une suite réelle convergente de limite 0.

Exemple 2.2.4. Les suites de terme général suivants convergent vers $(0,0)$ dans $\mathbb{R}^2$.

$$(0,0) \qquad \left(\frac{1}{n}, 0\right) \qquad \left(\frac{\cos(\theta)}{n^2}, \frac{\sin(\theta)}{n^2}\right) \qquad \left(\frac{\cos(n)}{n}, \frac{\sin(n)}{n}\right)$$

Remarque 2.2.5. Les coordonnées de chacune de ces suites convergent individuellement vers 0. On va le démontrer en général plus tard.

Proposition 2.2.6 (Caractérisation séquentielle des fermés)**.** *Une partie $A \subset \mathbb{R}^d$ est fermée si et seulement si pour toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathbb{R}^d$, qui converge vers $l \in \mathbb{R}^d$ et qui satisfait $u_n \in A$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $l \in A$.*

Démonstration. $\Rightarrow$: On suppose A fermée, c'est-à-dire, par définition, que $\mathbb{R}^d \setminus A$ est ouvert. Soit (u_n) une suite d'éléments de A qui converge vers $l \in \mathbb{R}^d$. Par la caractérisation ci-dessus, tout voisinage de l contient des éléments de A (les termes (u_n) à partir d'un certain rang). Donc $\mathbb{R}^d \setminus A$ n'est pas voisinage de l, donc puisque $\mathbb{R}^d \setminus A$ est ouvert, $l \notin \mathbb{R}^d \setminus A$. Autrement dit, $l \in A$.

$\Leftarrow$: On suppose maintenant que, pour toute suite (u_n) à valeurs dans A, qui converge vers $l \in \mathbb{R}^d$, on a $l \in A$. On va montrer que A est fermé, en raisonnant par l'absurde. Supposons que $\mathbb{R}^d \setminus A$ n'est pas ouvert. On peut donc choisir un élément $l \in \mathbb{R}^d \setminus A$ dont $\mathbb{R}^d \setminus A$ n'est pas voisinage. En particulier, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'ensemble $\mathring{B}(l,1/n) \cap \mathbb{R}^d \setminus (\mathbb{R}^d \setminus A) = \mathring{B}(l,1/n) \cap A$ n'est pas vide. En choisissant pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, un élément $u_n \in \mathring{B}(l,1/n) \cap A$, on construit une suite (u_n) à valeurs dans A, qui converge vers l. La première hypothèse implique $l \in A$, ce qui contredit $l \in \mathbb{R}^d \setminus A$. □

On peut re-démontrer de cette manière qu'une boule fermée est fermée.

Exemple 2.2.7. Soit $R \in \mathbb{R}_+$ et $x \in \mathbb{R}^d$. Alors la boule euclidienne fermée $B(x,R)$ de centre x et de rayon R est un fermé de $\mathbb{R}^d$. Soit (u_n) une suite dans $B(x,R)$, qui converge vers $l \in \mathbb{R}^d$. Par définition, $B(x,R) = \{y \in \mathbb{R}^d \mid \|y-x\| \leq R\}$. En particulier, on a $\|u_n - x\| \leq R$ pour tout n et par passage à la limite, $\|l-x\| \leq R$. Cette dernière affirmation signifie exactement $l \in B(x,R)$.

Attention, dans le *passage à la limite*, on a omis une partie du raisonnement : sous l'hypothèse $\lim u_n = l$, on a $\lim\|u_n - x\| = \|l-x\|$. C'est un bon exercice d'écrire la justification de ce passage.

Proposition 2.2.8. *Soit $A \subset \mathbb{R}^d$ une partie quelconque. L'adhérence de A est l'ensemble des points de $\mathbb{R}^d$ qui sont limites de points de A.*

Démonstration. En exercice (c'est essentiellement la même preuve que sur $\mathbb{R}$). □

Pour un exemple d'application, voir par exemple l'exercice 26 du TD.

Définition 2.2.9. Si A et B sont deux parties de $\mathbb{R}^d$, et $A \subset B$, on dit que A est dense dans B si $\bar{A} = B$.

Corollaire 2.2.10. *La partie A est dense dans B si et seulement si tout point de B est limite d'une suite à valeurs dans A.*

Remarque 2.2.11. Puisqu'une partie $A \subset \mathbb{R}^d$ est ouverte si et seulement si $\mathbb{R}^d \setminus A$ est fermée, on peut aussi déterminer si une partie est ouverte en termes de suites. Pour l'intérieur, on utilise la caractérisation séquentielle de l'adhérence et la proposition suivante.

Proposition 2.2.12. *On a $\overline{\mathbb{R}^d \setminus A} = \mathbb{R}^d \setminus \mathring{A}$.*

Démonstration. En exercice : voir exercice 25 du TD. □

2.2.2 Suites de Cauchy et complétude de $\mathbb{R}^d$

Définition 2.2.13. Soit (u_n) une suite d'éléments de $\mathbb{R}^d$. On dit que (u_n) est *de Cauchy* si

$$\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall m,n \geq N, \|u_n - u_m\| < \epsilon.$$

Dans cette section, on va montrer le théorème suivant, en utilisant un lemme encore plus important.

Théorème 2.2.14. *L'espace $\mathbb{R}^d$ est complet, c'est-à-dire que toute suite de Cauchy dans $\mathbb{R}^d$ converge vers un élément de $\mathbb{R}^d$.*

Le lemme suivant ramène au cas des suites réelles. Pour l'énoncer, on introduit quelques notations, que l'on conservera jusqu'à la fin du chapitre.

Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dans $\mathbb{R}^d$. On note $x_n = (x_{1,n}, x_{2,n}, \ldots, x_{d,n})$ en coordonnées pour tout $n \in \mathbb{N}$. Ceci fournit d suites réelles correspondantes à une suite dans $\mathbb{R}^d$.

Lemme 2.2.15.

1. *La suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $l = (l_1, \ldots, l_d) \in \mathbb{R}^d$ si et seulement si pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, la suite réelle $(x_{i,n})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers l_i.*
2. *La suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy si et seulement si pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, la suite réelle $(x_{i,n})_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy.*

Démonstration. La preuve repose de manière essentielle sur l'inégalité suivante, valable pour tout $x = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d$.

$$\sup\{|x_i| \mid i \in \{1, \dots, d\}\} \leq \|x\| \leq \sqrt{d} \sup\{|x_i| \mid i \in \{1, \dots, d\}\} \tag{2.1}$$

Pour la preuve de cette inégalité, on réfère au TD du troisième chapitre, ou on utilise le même principe que dans la question 1 de l'exercice 16 du TD.

On prouve la première proposition de l'énoncé du lemme, la seconde suivant les mêmes étapes de preuve.

Si (x_n) converge vers l, alors par définition,

$$\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, \|x_n - l\| < \epsilon.$$

En utilisant la partie de gauche de l'inégalité (2.1), on en déduit que pour tout $i \in \{1, \dots, d\}$,

$$\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, |x_{i,n} - l| < \epsilon,$$

c'est-à-dire que $(x_{i,n})$ converge vers l_i.

Réciproquement, supposons que $(x_{i,n})$ converge vers l_i pour chaque $i \in \{1, \dots, d\}$. Soit $\epsilon > 0$. Alors pour tout $i \in \{1, \dots, d\}$, il existe $N_i \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geq N_i, \quad |x_{i,n} - l_i| < \frac{\epsilon}{\sqrt{d}}.$$

Pour $n \geq N := \max\{N_i \mid i \in \{1, \dots, d\}\}$, on a donc,

$$\sup\{|x_i| \mid i \in \{1, \dots, d\}\} < \frac{\epsilon}{\sqrt{d}}.$$

En appliquant la partie de droite de l'inégalité (2.1), on en déduit

$$\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, \|x_n - l\| < \epsilon$$

et donc que (x_n) converge vers l. □

Les exercices 22 et 23 du TD sont en particulier reliés à ce lemme.

Preuve du Théorème. Si (x_n) est de Cauchy, alors par le deuxième point du lemme, chacune des suites $(x_{i,n})$ est de Cauchy. Chacune est convergente, vers un $l_i \in \mathbb{R}$, par complétude de $\mathbb{R}$. On applique le premier point du lemme pour en déduire que (x_n) converge vers $l = (l_1, \dots, l_d) \in \mathbb{R}^d$. □

2.2.3 Caractérisation séquentielle des compacts

Il suffit quasiment de recopier le cas $d = 1$.

Théorème 2.2.16. *Une partie $A \subset \mathbb{R}^d$ est compacte si et seulement si pour toute suite (x_n) à valeurs dans A, (x_n) admet une valeur d'adhérence dans A.*

Remarque 2.2.17. Il découle du lemme de la section précédente que $l = (l_1, \dots, l_d) \in \mathbb{R}^d$ est une valeur d'adhérence de (x_n) si et seulement si pour tout $i \in \{1, \dots, d\}$, l_i est une valeur d'adhérence de $(x_{i,n})$. (Ce n'est pas complètement immédiat si on veut l'écrire proprement : faire l'exercice de le rédiger).

Démonstration. $\Rightarrow$: Supposons A compacte, c'est-à-dire fermée et bornée d'après la définition donnée dans ce chapitre. Soit (x_n) une suite à valeurs dans A. C'est une suite bornée, donc chaque $(x_{i,n})$ est bornée également (utiliser l'inégalité (2.1) pour voir ça). Donc chaque $(x_{i,n})$ admet une valeur d'adhérence $l_i \in \mathbb{R}$ (par exemple $l_i = \limsup_{n\to\infty} x_{i,n}$). Donc (x_n) admet $l = (l_1, \ldots, l_d)$ comme valeur d'adhérence par la remarque préliminaire. Comme A est fermé, $l \in A$.

Réciproquement, montrons d'abord que A est fermée (en supposant la deuxième partie de l'énoncé du théorème). Soit $l \in \bar{A}$, et par caractérisation séquentielle de l'adhérence, soit (x_n) une suite à valeurs dans A qui converge vers l. Par convergence, l est l'unique valeur d'adhérence de (x_n), donc $l \in A$. On obtient ainsi $\bar{A} = A$, et A est fermée.

Supposons maintenant A non bornée. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, on peut trouver un élément $x_n \in A \cap \mathbb{R}^d \setminus B(0,n)$. En particulier, $\|x_n\| > N$ pour $n \geq N$. Si l est une valeur d'adhérence de (x_n), alors c'est la limite d'une sous-suite $(x_{\phi(n)})$, et on a $\|l\| \geq \phi(N)$ pour tout $N \in \mathbb{N}$ (par passage à la limite), donc $\|l\| = \infty$. $\square$

Les exercices 27 et 30 du TD donnent des exemples d'application de cette caractérisation.

UNIVERSITÉ DE MONTPELLIER **L2 Mathématiques**
HLMA412 Compléments d'Analyse **Année 2019-2020**

TD 2 : Propriétés topologiques des parties de $\mathbb{R}^n$

Exercice 16. Dans cet exercice, on utilise la définition des ouverts *via* les voisinages, et pas de critères séquentiels. On représentera chaque raisonnement sur un dessin. On considère les parties de $\mathbb{R}^2$:

$$U :=]-1,1[\times]-1,1[\quad \text{et} \quad F := [-1,1]\times[-1,1].$$

1. Calculer le plus grand réel r, et le plus petit réel R, tels que
$$B(0,r) \subset F \subset B(0,R),$$
où $B(0,r)$ désigne la boule Euclidienne *fermée* de centre 0 et de rayon r.
2. Montrer que U est ouvert.
3. Montrer que F est fermé.
4. Déterminer l'intérieur de F.
5. Montrer que F est compact.

Exercice 17. Quels sont l'adhérence et l'intérieur de $\mathbb{R}\times\{0\} \subset \mathbb{R}^2$?

Exercice 18. On considère la bande verticale

$$C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1\} \subset \mathbb{R}^2.$$

Montrer que C est fermé. Quel est l'intérieur de C ?

Exercice 19. Soit (a,b) un vecteur de $\mathbb{R}^2$, et c un réel. On considère

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid ax+by > c\}.$$

Si $(x_0,y_0) \in D$, déterminer le plus grand réel r tel que la boule Euclidienne ouverte $\mathring{B}((x_0,y_0),r)$ soit incluse dans D. Montrer que D est une partie ouverte de $\mathbb{R}^2$.

Exercice 20. Pour chacun des ensembles de $\mathbb{R}^2$ suivants, les représenter et déterminer s'ils sont compacts.

$\{(0,0)\}$	$\{0\}\times[0,1]$
$\{0\}\times[0,1]\cup]0,1]\times\{0\}$	$\{0\}\times[0,1]\cup[0,1[\times\{1\}$
$\{(x,y) \mid x\geq 0,\ y \geq 0,\ xy \leq 1\}$	$\{(x,y) \mid x \geq 0,\ y\geq 0,\ x^2+y^2 \leq 1\}$
$\{(x,2x) \mid 0 \leq x \leq 1\}$	

Exercice 21. Démontrer ou infirmer les assertions suivantes.

1. Une intersection finie de compacts est compacte.
2. Une intersection quelconque de compacts est compacte.
3. Une réunion finie de compacts est compacte.
4. Une réunion quelconque de compacts est compacte.
5. Le complémentaire d'un ouvert non-borné est compact.

Exercice 22. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathbb{R}^2$. Pour tout n, on note $u_n = (x_n, y_n)$ en coordonnées. Déterminer si les équivalences suivantes sont vraies :

1. $\lim u_n = 0 \iff \lim(x_n + y_n) = \lim(x_n - y_n) = 0$
2. (u_n) converge $\iff (x_n + y_n)$ et $(x_n - y_n)$ convergent
3. $\lim u_n = 0 \iff \lim x_n^4 + y_n^2 = 0$
4. (u_n) converge $\iff (x_n^4 + y_n^2)$ converge
5. $\lim u_n = (s,t) \in \mathbb{R}^2 \iff \lim \big((x_n - s)^4 + (y_n - t)^2\big) = 0$

Exercice 23. Soit (u_n) une suite d'éléments de $\mathbb{R}^3$. On note $u_n = (x_n, y_n, z_n)$ en coordonnées. Déterminer si les équivalences suivantes sont vraies :

1. (u_n) converge $\iff (x_n + y_n + z_n)$, $(2y_n + 3z_n)$, et $(-z_n)$ convergent
2. (u_n) converge $\iff (x_n + 2y_n + 3z_n)$, $(2x_n + 2y_n - z_n)$ et $(x_n - 4z_n)$ convergent.

Exercice 24. On rappelle que la distance Euclidienne entre deux points $x = (x_1, \dots, x_n)$ et $y = (y_1, \dots, y_n)$ de $\mathbb{R}^n$ est définie par

$$d(x,y) = \|y - x\|_2 = \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + \cdots + (y_n - x_n)^2}.$$

Si A est une partie de $\mathbb{R}^n$, et $x \in \mathbb{R}^n$, on pose

$$d(x, A) := \inf\{d(x,y) \mid y \in A\}.$$

1. Identifier $\{x \in \mathbb{R}^n \mid d(x,A) = 0\}$ à un ensemble défini en cours.
2. Soit ϵ un réel strictement positif. Montrer que l'ensemble

   $$A_\epsilon := \{x \in \mathbb{R}^n \mid d(x,A) < \epsilon\}$$

   est un ouvert de $\mathbb{R}^n$ (faire un dessin).
3. Identifier $\displaystyle\bigcap_{\epsilon\in\mathbb{R}_+^*} A_\epsilon$.

Exercice 25. Soit A une partie de $\mathbb{R}^n$.

1. Montrer que si $a \in \bar{A}$, alors $\mathbb{R}^n \setminus A$ n'est pas voisinage de a.
2. Montrer que $\mathbb{R}^n \setminus \bar{A}$ est l'intérieur de $\mathbb{R}^n \setminus A$.
3. En déduire que A est dense dans $\mathbb{R}^n$ si et seulement si son complémentaire est d'intérieur vide.
4. Soit $a \in \bar{A}$. Rappeler comment construire une suite (u_n) à valeurs dans A qui converge vers a.

Exercice 26. Déterminer l'adhérence de $A := \{(t, \sin(1/t)) \in \mathbb{R}^2 \mid t > 0\}$ dans $\mathbb{R}^2$.

Exercice 27. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans $\mathbb{R}^n$, qui converge vers une limite $l \in \mathbb{R}^n$. Montrer que $A := \{l\} \cup \{u_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ est un sous-ensemble compact de $\mathbb{R}^n$.

Exercice 28. Soient A et B deux parties de $\mathbb{R}^n$.

1. Montrer que si $A \subset B$, alors $\mathring{A} \subset \mathring{B}$ et $\bar{A} \subset \bar{B}$.
2. Montrer que l'intérieur de $A \cap B$ est $\mathring{A} \cap \mathring{B}$ mais qu'on peut avoir une inclusion stricte de $\mathring{A} \cup \mathring{B}$ dans l'intérieur de $A \cup B$.
3. On considère
$$A = [0, 1[\cup]1, 2] \cup \{3\} \cup (\mathbb{Q} \cap [4, 5])$$
Déterminer $\bar{A}$, $\mathring{A}$, $\bar{\mathring{A}}$, $\mathring{\bar{A}}$, $\mathring{\bar{\mathring{A}}}$ et $\bar{\mathring{\bar{A}}}$.
4. Existe-t-il un ensemble B tel que $\mathring{\bar{\mathring{\bar{B}}}} \neq \mathring{\bar{B}}$? que $\bar{\mathring{\bar{\mathring{B}}}} \neq \bar{\mathring{B}}$?

Exercice 29. Soit B_1 une boule ouverte dans $\mathbb{R}^n$ et B_2 une boule ouverte dans $\mathbb{R}^m$. Montrer que $B_1 \times B_2$ est un ouvert de $\mathbb{R}^{n+m} = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$. En déduire que le produit cartésien d'un ouvert de $\mathbb{R}^n$ avec un ouvert de $\mathbb{R}^m$ est un ouvert de $\mathbb{R}^{n+m}$.

Exercice 30. Soit K_1 un compact de $\mathbb{R}^n$ et K_2 un compact de $\mathbb{R}^m$. Montrer que $K_1 \times K_2$ est un compact de $\mathbb{R}^{n+m}$.

Exercice 31. Soient A et B deux parties de $\mathbb{R}^n$. On pose
$$d(A, B) := \inf\{d(x, y) \mid (x, y) \in A \times B\}.$$

1. Montrer que si A et B sont compacts, alors il existe $(x_0, y_0) \in A \times B$ tel que $d(A, B) = d(x_0, y_0)$.
2. Montrer que si deux ensembles *compacts* A et B sont disjoints, alors $d(A, B) > 0$.
3. Montrer que si A et B sont deux compacts disjoints, il existe deux ouverts U et V de $\mathbb{R}^n$ tels que $A \subset U$, $B \subset V$ et $U \cap V = \emptyset$ (On pourra utiliser l'exercice 24).
4. Donner des exemples d'ensembles fermés A et B avec $d(A, B) = 0$.
5. Donner des exemples d'ensembles bornés A et B avec $d(A, B) = 0$.
6. Montrer que si A est compact et $B \subset \mathbb{R}^n \setminus A$ est fermé, alors $d(A, B) > 0$.
7. Montrer que si A et B sont deux fermés disjoints de $\mathbb{R}^n$, il existe deux ouverts U et V de $\mathbb{R}^n$ tels que $A \subset U$, $B \subset V$ et $U \cap V = \emptyset$.

Chapitre 3

Fonctions continues $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$

3.1 Fonctions continues

3.1.1 Définition

Définition 3.1.1. Soit $f : A \subset \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$, $y \in \bar{A}$ et $l \in \mathbb{R}^q$.

1. La fonction f *converge vers* l *en* y (on note $\lim_{x\to y} f(x) = l$) si
$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in A, \|x - y\| < \delta \Longrightarrow \|f(x) - l\| < \epsilon.$$
2. Si $y \in A$, on dit que f est *continue en* y si $\lim_{x\to y} f(x) = f(y)$.
3. On dit que f est *continue sur* A si f est continue en y pour tout $y \in A$.

Remarque 3.1.2. Si f a une limite en y alors celle-ci est unique (rédiger la preuve en exercice).

Exemple 3.1.3. La fonction $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ définie par $f(x_1, \dots, x_n) = x_1$ est continue. En effet, pour $x = (x_1, \dots, x_n)$ et $y = (y_1, \dots, y_n)$, on a toujours $|x_1 - y_1| \leq \|x - y\|$, donc pour tout $\epsilon > 0$, $\|x - y\| < \epsilon$ implique $\|f(x) - f(y)\| = |x_1 - y_1| < \epsilon$.

La fonction de l'exemple précédent s'appelle la projection sur la première coordonnée. De même, les projections sur les autres coordonnées $x \mapsto x_i$ pour $i \in \{1, \dots, d\}$ sont continues.

Proposition 3.1.4 (Caractérisation séquentielle des limites)**.** *Dans le cadre de la définition précédente, on a* $\lim_{x\to y} f(x) = l$ *si et seulement si, pour toute suite* (x_n) *à valeurs dans* A*, qui converge vers* y*, la suite* $(f(x_n))$ *converge vers* l*.*

Démonstration. C'est une preuve très formelle en revenant aux définitions avec des epsilons.

$\Rightarrow$: On suppose $\lim_{x\to y} f(x) = l$. Soit (x_n) une suite dans A qui converge vers y. Soit $\epsilon > 0$, et soit $\delta > 0$ tel que, si $\|x - y\| < \delta$, alors $\|f(x) - l\| < \epsilon$. Alors comme $\lim_{n\to\infty} x_n = y$, il existe un rang $N \in \mathbb{N}$ tel que pour $n \geq N$, $\|x_n - y\| < \delta$. On a donc, en mettant ces deux propriétés ensembles : pour tout $n \geq N$, $\|f(x_n) - l\| < \epsilon$. On a donc vérifié par la définition que $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = l$.

$\Leftarrow$: Réciproquement, supposons qu'on n'ait pas $\lim_{x\to y} f(x) = l$. Cela signifie qu'on peut trouver un $\epsilon > 0$ tel que pour tout $\delta > 0$, il existe un $x \in A$ qui vérifie $\|x - y\| < \delta$ et $\|f(x) - l\| \geq \epsilon$. Fixons un tel ϵ. On construit une suite (x_n) en choisissant, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, un $x_n \in A$ tel que $\|x_n - y\| < 1/n$ et $\|f(x_n) - l\| \geq \epsilon$. Alors $\lim_{n\to\infty} x_n = y$, mais $(f(x_n))$ ne converge pas vers l. $\square$

Corollaire 3.1.5. *Une fonction* $f : A \subset \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ *est continue sur* A *si et seulement si pour toute suite* (x_n) *à valeurs dans* A*, qui converge vers un élément* $l \in A$*, on a* $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(y)$*.*

On note, si $f : A \subset \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$, $f(x) = (f_1(x), \ldots, f_q(x))$ en coordonnées pour tout $x \in A$. On appelle les fonctions $f_i : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ ainsi définies les fonctions composantes de f.

Proposition 3.1.6. *Si $l = (l_1, \ldots, l_q) \in \mathbb{R}^q$ et $y \in \bar{A}$, on a $\lim_{x \to y} f(x) = l$ si et seulement si pour tout $i \in \{1, \ldots, q\}$, $\lim_{x \to y} f_i(x) = l_i$.*

Démonstration. C'est une conséquence directe de la caractérisation séquentielle, et du lemme du chapitre précédent qui dit qu'une suite (x_n) de $\mathbb{R}^q$ converge si et seulement si ses suites coordonnées $(x_{i,n})$ convergent pour tout $i \in \{1, \ldots, q\}$. □

Corollaire 3.1.7. *Une fonction $f : A \subset \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ est continue sur A si et seulement si ses fonctions composantes le sont.*

3.1.2 Quelques opérations sur les fonctions continues/les limites

Proposition 3.1.8. *Soit $A \subset \mathbb{R}^p$, soient $f : A \to \mathbb{R}$ et $g : A \to \mathbb{R}$ deux fonctions à valeurs réelles, soit $y \in \bar{A}$ et soient α et β deux réels. Alors si $\lim_{x \to y} f(x) = \alpha$ et $\lim_{x \to y} g(x) = \beta$, on a $\lim_{x \to y} (fg)(x) = \alpha\beta$.*

Démonstration. Soit $\epsilon > 0$. Par définition des limites de f et g, on a

$$\exists \delta > 0, \forall x \in A, \|x - y\| < \delta \Rightarrow |f(x) - \alpha| < \epsilon$$

et

$$\exists \gamma > 0, \forall x \in A, \|x - y\| < \gamma \Rightarrow |g(x) - \beta| < \epsilon$$

On a par ailleurs

$$\begin{aligned} |f(x)g(x) - \alpha\beta| &= |(f(x) - a)g(x) + \alpha(g(x) - \beta)| \\ &\leq |f(x) - \alpha||g(x)| + |\alpha||g(x) - \beta| \\ &\leq |f(x) - \alpha|(|\beta| + |g(x) - \beta|) + |\alpha||g(x) - \beta| \end{aligned}$$

On a donc, pour $\|y - x\| < \min(\delta, \gamma)$,

$$|(fg)(x) - \alpha\beta| \leq \epsilon(|\beta| + \epsilon) + |\alpha|\epsilon.$$

Le terme de droite ci-dessus peut être rendu aussi petit qu'on veut en choisissant bien ϵ, donc on a vérifié la définition de $\lim_{x \to y} (fg)(x) = \alpha\beta$. □

Corollaire 3.1.9. *Si f et g sont des fonctions de $A \subset \mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}$ continues sur A, alors le produit fg est aussi continu sur A.*

Définition 3.1.10. On appelle *monôme* une fonction $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ définie par $f(x_1, \ldots, x_p) = x_1^{k_1} \times x_2^{k_2} \times \cdots \times x_p^{k_p}$ avec $k_1, \ldots, k_p \in \mathbb{N}$.

On a vu que les fonctions qui à x associent l'une de ses coordonnées sont continues, on déduit d'applications successives du corollaire précédent l'exemple suivant.

Exemple 3.1.11. Un monôme est une fonction continue sur $\mathbb{R}^p$.

Proposition 3.1.12. *Soit $A \subset \mathbb{R}^p$, f_1 et f_2 deux fonctions de A dans $\mathbb{R}^q$, λ_1 et λ_2 deux nombres réels, y un point de A, l_1 et l_2 deux éléments de $\mathbb{R}^q$. Si $\lim_{x \to y} f_1(x) = l_1$ et $\lim_{x \to y} f_2(x) = l_2$, alors*

$$\lim_{x \to y} (\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2)(x) = \lambda_1 l_1 + \lambda_2 l_2.$$

Démonstration. En exercice. □

Corollaire 3.1.13. *Si $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, $A \subset \mathbb{R}^p$, $f_1, f_2 : A \to \mathbb{R}^q$ sont des fonctions continues, alors $\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2$ est une fonction continue sur A.*

Définition 3.1.14. On appelle *polynôme* une fonction f de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}$ obtenue comme combinaison linéaire (finie) de monômes : $f = \lambda_1 f_1 + \cdots + \lambda_N f_N$ avec $\lambda_1, \ldots, \lambda_N \in \mathbb{R}$ et $f_1, \ldots, f_n$ monômes.

Exemple 3.1.15. Un polynôme $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ est continu sur $\mathbb{R}^p$.

Proposition 3.1.16. *Soit $f : A \subset \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ une fonction qui ne s'annule pas sur A. Soit $y \in \bar{A}$. On suppose $\lim_{x\to y} f(x) = l \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Alors la fonction $\frac{1}{f}$ est bien définie sur un voisinage de y, et on a*

$$\lim_{x\to y} \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{l}.$$

Démonstration. En exercice. □

Corollaire 3.1.17. *Soit $f : A \subset \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ une fonction continue, qui ne s'annule pas sur A. Alors la fonction $\frac{1}{f} : A \to \mathbb{R}, x \mapsto \frac{1}{f(x)}$ est continue sur A.*

Définition 3.1.18. On appelle *fraction rationnelle* une fonction $f : A \subset \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ obtenue comme quotient $f = \frac{f_1}{f_2}$ de deux fonctions polynômes f_1 et f_2, avec $A = \{x \in \mathbb{R}^p \mid f_2(x) \neq 0\}$.

En remarquant $f = f_1 \times \frac{1}{f_2}$, il suit des opérations précédentes l'exemple suivant.

Exemple 3.1.19. Une fraction rationnelle est continue (sur son ensemble de définition).

Définition 3.1.20. Une *fonction rationnelle* $f : A \subset \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ est une fonction dont chaque fonction composante est une fraction rationnelle dont l'ensemble de définition contient A.

On se rappelle de la section précédente qu'une fonctions est continue si et seulement si ses fonctions composantes sont continues, et on obtient l'exemple suivant.

Exemple 3.1.21. Les fonctions rationnelles sont continues sur leur ensemble de définition.

Attention une fonction peut-être définie par une fraction rationnelle sur un certain ensemble, et être continue sur un ensemble plus gros sans être une fraction rationnelle sur cet ensemble plus gros. Ce sera plus clair avec l'exercice suivant.

Exercice 32. Soit $f_k : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f_k(0,0) = 0$ et $f_k(x,y) = \frac{x^k}{x^2+y^2}$ pour $(x, y \neq (0,0)$.

1. Montrer que $f_k|_{\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}}$ est continue.
   Indication : il suffit de remarquer que c'est une fraction rationnelle.
2. Déterminer les valeurs de k telles que f_k soit continue en $(0,0)$.
   Indications : pour deviner les comportements possibles, on peut commencer par le problème analogue en dimension 1, c'est-à-dire : quand est-ce que $\lim_{x\to 0} \frac{x^k}{x^2} = 0$?
   On utilisera ensuite des majorations, minorations, ou critères séquentielles pour démontrer la continuité ou la non-continuité.
   Faire particulièrement attention au cas $k = 2$.

3.2 Fonctions continues et propriétés topologiques

Rappelons quelques notations que nous utilisons dans la suite. Soient $A \subset \mathbb{R}^p$, $B \subset A$, $C \subset \mathbb{R}^q$ des ensembles et $f : A \to \mathbb{R}^q$ une fonction définie sur A.

— L'image (directe) de B par f est notée $f(B)$, et désigne l'ensemble $\{f(x) \mid x \in B\}$.

— L'image réciproque de C par f est notée $f^{-1}(C)$, et désigne l'ensemble $\{x \in A \mid f(x) \in C\}$.

On rappelle que même si la notation implique f^{-1}, les images réciproques sont définies pour toutes les fonctions, sans supposer qu'elles soient bijectives.

3.2.1 Image réciproques d'ouverts et de fermés

La proposition suivante est une reformulation de la définition de limite pour un point dans l'intérieur de l'ensemble de définition.

Proposition 3.2.1. *Soit $f : A \subset \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ une fonction, $y \in \mathring{A}$, $l \in \mathbb{R}^q$. Alors $\lim_{x\to y} f(x) = l$ si et seulement si, pour tout voisinage $V \subset \mathbb{R}^q$ de l, $f^{-1}(V)$ est un voisinage de y.*

Proposition 3.2.2. *Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^p$ et $f : U \to \mathbb{R}^q$ une fonction. Alors f est continue sur U si et seulement si pour tout ouvert V de $\mathbb{R}^q$, $f^{-1}(V)$ est un ouvert de $\mathbb{R}^p$.*

Démonstration. $\Rightarrow$: On suppose f continue et V ouvert de $\mathbb{R}^q$. Soit $a \in f^{-1}(V)$ (c'est-à-dire $a \in U$ et $f(a) \in V$). On a $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$, et V est un voisinage de $f(a)$ car V est ouvert, donc $f^{-1}(V)$ est un voisinage de a. On a montré que $f^{-1}(V)$ est voisinage de chacun de ses points, donc que $f^{-1}(V)$ est ouvert.

$\Leftarrow$: On suppose maintenant que pour tout ouvert V de $\mathbb{R}^q$, $f^{-1}(V)$ est ouvert. Soit $a \in U$, et soit $\epsilon > 0$. On considère $V := \mathring{B}(f(a), \epsilon)$. C'est un ouvert de $\mathbb{R}^q$. Donc $f^{-1}(V)$ est un ouvert de $\mathbb{R}^p$. En particulier, $f^{-1}(V)$ est un voisinage de $a \in f^{-1}(V)$, donc il existe $\delta > 0$ tel que $\mathring{B}(a, \delta) \subset f^{-1}(V)$. C'est une traduction en termes de boules de la définition de la continuité de f en a. □

Exemple. Prenons l'exemple de la fonction $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \|x\|^2$. C'est une fonction continue car elle est polynomiale. Ici $U = \mathbb{R}^p$ est bien ouvert. On peut donc appliquer la proposition, par exemple à l'ouvert $V =]-\infty, 1[$ de $\mathbb{R}$, et ainsi obtenir que $f^{-1}(V)$ est ouvert. Cela permet de retrouver que la boule euclidienne ouverte de rayon un est ouverte puisque $f^{-1}(V) = \mathring{B}(0, 1)$.

Exemple. Pour une première application de l'autre sens, prenons simplement la fonction identité $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^p$ définie sur $\mathbb{R}^p$ tout entier. Il est clair que pour tout ouvert $V \subset \mathbb{R}^p$, $f^{-1}(V) = V$ est ouvert, donc f est continue (ce n'est pas une surprise...). Pour des exemples d'application plus intéressant, considérer les exercices 7 et 8 du TD3 (dans la numérotation des feuilles imprimées !).

Remarque 3.2.3. Tel quel, l'énoncé est faux si on ne suppose pas l'ensemble de définition U ouvert. Par exemple, considérons la fonction racine carrée $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \sqrt{x}$. Pour un intervalle ouvert $]a, b[$ avec $a \geq 0$, l'image réciproque $f^{-1}(]a, b[) =]a^2, b^2[$ est bien un ouvert de $\mathbb{R}$. Par contre, si $a < 0$ et $b > 0$, on a $f^{-1}(]a, b[) = [0, b^2[$ qui n'est *pas* un ouvert de $\mathbb{R}$. On verra comment le corriger pour qu'il s'applique en général dans la section suivante.

Proposition 3.2.4. *Soit F un fermé de $\mathbb{R}^p$ et $f : F \to \mathbb{R}^q$ une fonction. Alors f est continue sur F si et seulement si pour tout fermé G de $\mathbb{R}^q$, $f^{-1}(G)$ est un fermé de $\mathbb{R}^p$.*

Exemple. Considérons à nouveau la fonction racine carrée $f : [0, \infty[\to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \sqrt{x}$. On sait que cette fonction est continue (mais on peut toujours refaire l'exercice de le démontrer). Si $G = [a,b]$ est un intervalle fermé de $\mathbb{R}$ avec $a \geq 0$, alors on a $f^{-1}(G) = [a^2, b^2]$. Si $G = [a,b]$ avec $a < 0$ et $b \geq 0$, on a $f^{-1}(G) = [0, b^2]$. Enfin, si $b < 0$, on a $f^{-1}([a,b]) = \emptyset$. Dans tous les cas, on constate bien que $f^{-1}(G)$ est un fermé de $\mathbb{R}$.

Démonstration. Ici on peut utiliser le critère séquentiel de continuité. Supposons f continue, et G fermé dans $\mathbb{R}^q$. Soit (x_n) une suite dans $f^{-1}(G)$, convergente dans $\mathbb{R}^p$ vers l. On a $l \in F$ car F est fermé. Alors $(f(x_n))$ est une suite dans G convergente dans $\mathbb{R}^q$ vers $f(l)$ par critère séquentiel de continuité pour f. Comme G est fermé, on a $f(l) \in G$. Finalement, $l \in f^{-1}(G)$, donc $f^{-1}(G)$ est fermé.

Réciproquement, supposons f non continue. Soit (x_n) une suite dans F, convergente vers $l \in F$, telle que $f(x_n)$ ne converge pas vers $f(l)$ (une telle suite existe car le critère séquentiel de continuité n'est *pas satisfait* pour f. Alors

$$\exists \epsilon > 0, \forall N \in \mathbb{N}, \exists m \geq N, \|f(x_m) - f(l)\| \geq \epsilon.$$

On fixe un tel ϵ, et on considère le fermé $G = \mathbb{R}^q \setminus \mathring{B}(f(l), \epsilon)$. Par choix de ϵ, on peut construire une sous-suite $(x_{\phi(n)})$ de (x_n) qui prends ses valeurs dans $f^{-1}(G)$: on fixe $\phi(0) = 0$, puis, si $\phi(n)$ est construit, on construit $\phi(n+1)$ comme un des indices m tels que $m \geq \phi(n)$ et $\|f(x_m) - f(l)\| \geq \epsilon$. La suite $(x_{\phi(n)})$ converge vers l, car c'est une sous-suite de (x_n). C'est une suite à valeurs dans $f^{-1}(G)$ par définition de G. Mais l n'est pas dans $f^{-1}(G)$, donc $f^{-1}(G)$ n'est pas fermé (car le critère séquentiel de fermeture n'est pas satisfait). □

Corollaire 3.2.5. *Soit $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ une fonction définie* partout. *Alors les trois assertions suivantes sont équivalentes :*

1. *f est continue sur $\mathbb{R}^p$,*
2. *$f^{-1}(V)$ est ouvert pour tout ouvert V de $\mathbb{R}^q$,*
3. *$f^{-1}(G)$ est fermé pour tout fermé G de $\mathbb{R}^q$.*

3.2.2 La 'vraie définition' des fonctions continues via la topologie induite

Soit $A \subset \mathbb{R}^p$ une partie quelconque.

Définition 3.2.6.

— On appelle *ouvert de A* tout sous-ensemble $B \subset A$ qui peut s'écrire sous la forme $B = U \cap A$ où U est un ouvert de $\mathbb{R}^p$.

— On appelle *fermé de A* tout sous-ensemble $B \subset A$ qui peut s'écrire sous la forme $B = F \cap A$ où F est un fermé de $\mathbb{R}^p$.

Exemple. Prenons $p = 1$, et $A =]0,2] \subset \mathbb{R}$. Alors par exemple $B =]1,2]$ est un ouvert de A, car on peut l'écrire sous la forme $B =]1,3[\cap A$, et $U =]1,3[$ est un ouvert de $\mathbb{R}$. L'ensemble $C =]0,1]$ est, lui, un fermé de A. En effet, on peut l'écrire sous la forme $C = [-1,1] \cap A$, et $F = [-1,1]$ est un fermé de $\mathbb{R}$.

Remarque. On se rappelle que $\mathbb{R}^p$ est à la fois ouvert et fermé. On a donc que $A = \mathbb{R}^p \cap A$ est un ouvert de A, et $A = \mathbb{R}^p \cap A$ est un fermé de A !

Remarque 3.2.7. De manière équivalente, B est un fermé de A si et seulement si $A \setminus B$ est un ouvert de A.

D'autres définitions se généralisent, par exemple, l'adhérence $\bar{B}^A$ de B dans A est le plus petit fermé de A qui contient B. On peut vérifier que $\bar{B}^A = \bar{B} \cap A$. En effet, d'une part, $\bar{B} \cap A$ est un fermé de A contenant B. D'autre part si C est un fermé de A contenant B, alors $C = D \cap A$ où D est un fermé de $\mathbb{R}^p$. On a $B \subset C \subset D$, donc $\bar{B} \subset D$, donc $\bar{B} \cap A \subset C$, c'est-à-dire que $\bar{B} \cap A$ est le plus petit fermé de A contenant B.

Proposition 3.2.8. *Soit A une partie quelconque de $\mathbb{R}^p$, et $f : A \to \mathbb{R}^q$ une fonction. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. *f est continue sur A,*
2. *$f^{-1}(U)$ est un ouvert* de *A pour tout ouvert U de $\mathbb{R}^q$,*
3. *$f^{-1}(F)$ est un fermé* de *A pour tout fermé F de $\mathbb{R}^q$.*

Démonstration. Il suffit essentiellement de suivre les preuves précédentes avec les nouvelles définitions. □

Attention, cette proposition n'est pas une conséquence du Corollaire 3.2.5 ! Dans le Corollaire 3.2.5, on s'intéressait uniquement aux fonctions $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ définies sur $\mathbb{R}^p$ *tout entier*. Ici on s'autorise un ensemble de définition arbitraire.

Remarque 3.2.9. Pour la limite en un point $y \in \bar{A}$, la caractérisation devient : $\lim_{x\to y} f(x) = l$ si et seulement si, pour tout voisinage V de l dans $\mathbb{R}^q$, $f^{-1}(V)$ peut s'écrire comme $U \cap A$, où U est un voisinage de y dans $\mathbb{R}^p$. (On peux ici aussi parler de voisinage de y *dans* A).

3.2.3 Fonctions continues et compacité

Théorème 3.2.10. *Soit $K \subset \mathbb{R}^p$ un compact et $f : K \to \mathbb{R}^q$ une fonction continue. Alors $f(K)$ est un compact de $\mathbb{R}^q$.*

Démonstration. Soit (y_n) une suite dans $f(K)$. Pour chaque $n \in \mathbb{N}$, il existe donc x_n tel que $f(x_n) = y_n$.

Comme K est compact, il existe une sous-suite $(x_{\phi(n)})$ de (x_n) qui converge vers un élément x de K. Par continuité de f, on a $\lim_{n\to\infty} f(x_{\phi(n)}) = f(x)$. De plus $f(x) \in f(K)$, donc on a vérifié la caractérisation séquentielle de la compacité pour $f(K)$. □

Corollaire 3.2.11. *Une fonction $f : K \to \mathbb{R}$, où K est un compact de $\mathbb{R}^p$, est bornée et atteint ses bornes. C'est-à-dire qu'il existe x_0 et y_0 dans K tels que $f(x_0) = \sup\{f(x) \mid x \in K\}$ et $f(y_0) = \inf\{f(y) \mid y \in K\}$.*

Démonstration. Par le théorème, $f(K)$ est compact dans $\mathbb{R}$. En particulier, $f(K)$ est borné. Comme d'habitude, on peut construire une suite x_n dans K telle que $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \sup\{f(x) \mid x \in K\}$. Par compacité de K, (x_n) admet une sous-suite qui converge vers x. Par continuité, $f(x) = \sup\{f(x) \mid x \in K\}$. De même pour la borne inf. □

3.3 Continuité uniforme

Définition 3.3.1. Soit $A \subset \mathbb{R}^p$ et $f : A \to \mathbb{R}^q$. On dit que f est uniformément continue sur A si

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x, y \in A, \|y - x\| < \delta \Rightarrow \|f(y) - f(x)\| < \epsilon$$

Remarque 3.3.2.
- Une fonction uniformément continue est continue.
- Il faut d'ailleurs faire attention à l'ordre pour ne pas se retrouver avec la définition d'une fonction continue !

Théorème 3.3.3 (de Heine). *Soit K un compact de $\mathbb{R}^p$ et $f : K \to \mathbb{R}^q$ une fonction continue. Alors f est uniformément continue sur K.*

Démonstration. Par l'absurde : supposons

$$\exists \epsilon > 0, \forall \delta > 0, \exists x, y \in A, \|y - x\| < \delta \text{ et } \|f(y) - f(x)\| > \epsilon.$$

On fixe un tel $\epsilon > 0$, et on considère les $\delta = \frac{1}{n}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$. On peut ainsi construire deux suites (x_n) et (y_n) qui satisfont $\|y_n - x_n\| < \frac{1}{n}$ et $\|f(y_n) - f(x_n)\| > \epsilon$.

Par compacité, il existe une sous-suite $(x_{\phi(n)})$ de (x_n) qui converge vers un $\alpha \in K$. De même, il existe une sous-suite $(y_{\psi(n)})$ de $(y_{\phi(n)})$ qui converge vers un $\beta \in K$.

Par continuité de f, on a $\|f(\beta) - f(\alpha)\| > \epsilon$.

En passant à la limite dans l'inégalité $\|y_{\psi(n)} - x_{\psi(n)}\| < \frac{1}{\psi(n)}$, on obtient $\alpha = \beta$. Donc $f(\alpha) = f(\beta)$, ce qui contredit la conclusion précédente. $\square$

TD 3 : Fonctions continues et propriétés topologiques

Exercice 33. Soient f et g deux fonctions continues de $\mathbb{R}^p$ vers $\mathbb{R}^q$. Montrer que $f+g$ est une fonction continue (en revenant aux définitions).

Exercice 34. Soit $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ une fonction continue qui ne s'annule pas sur $\mathbb{R}^p$. Montrer que $x \mapsto \frac{1}{f(x)}$ est une fonction continue sur $\mathbb{R}^p$ (en revenant aux définitions).

Exercice 35. Pour $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, on note toujours $\|x\|$ la norme euclidienne de x, et on introduit les notations :

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i| \qquad \text{et} \quad \|x\|_\infty = \sup\{|x_i| \mid 1 \le i \le n\}$$

1. Montrer que
$$\|x\|_\infty \le \|x\| \le \sqrt{n}\|x\|_\infty$$
2. En déduire qu'une fonction $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est continue en x si et seulement si pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $y \in \mathbb{R}^n$, on ait
$$\|y - x\|_\infty < \delta \Longrightarrow |f(y) - f(x)| < \epsilon.$$
3. Montrer que
$$\|x\| \le \|x\|_1 \le n\|x\|$$
4. En déduire qu'une fonction $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est continue en x si et seulement si pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $y \in \mathbb{R}^n$, on ait
$$\|y - x\|_1 < \delta \Longrightarrow |f(y) - f(x)| < \epsilon.$$
5. Montrer que
$$\|x\|_1 \le \sqrt{n}\|x\|$$

Exercice 36. Montrer que la fonction $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2, (x, y, z) \mapsto (y, z)$ est continue.

Exercice 37. Déterminer en quels points les fonctions suivantes sont continues :

$$f_1(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \\ \frac{x}{x^2+y^2} & \text{sinon} \end{cases} \qquad f_2(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \\ \frac{x^3}{x^2+y^2} & \text{sinon} \end{cases}$$

$$f_3(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \\ \frac{y^3 - xy}{x^2+y^2} & \text{sinon} \end{cases} \qquad f_4(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \\ \frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2} & \text{sinon} \end{cases}$$

Exercice 38. Soient $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues. Déterminer si les ensembles suivants sont fermés :

$$\begin{aligned}
\mathcal{A} &= \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) = g(x)\}\\
\mathcal{B} &= \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x)^2 + g(x)^2 = 0\}\\
\mathcal{C} &= \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x)g(x) = 0\}\\
\mathcal{D} &= \{x \in \mathbb{R}^n \mid \forall n \in \mathbb{Z}, f(nx) = g(nx)\}\\
\mathcal{E} &= \{x \in \mathbb{R}^n \mid \exists n \in \mathbb{Z}, f(nx) = g(nx)\}
\end{aligned}$$

Exercice 39. Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction. On appelle

— *ensembles de niveau* de f les ensembles

$$f^{-1}(r) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) = r\} \quad \text{pour } r \in \mathbb{R},$$

— *ensembles de sur-niveau strict* de f les ensembles

$$f^{-1}(]r, +\infty[) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) > r\} \quad \text{pour } r \in \mathbb{R}$$

— *ensembles de sous-niveau strict* de f les ensembles

$$f^{-1}(]-\infty, r[) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) < r\} \quad \text{pour } r \in \mathbb{R}.$$

1. Montrer que si f est continue, ses ensembles de niveau sont fermés.
2. Montrer que si f est continue, ses ensembles de sous-niveau et de sur-niveau stricts sont ouverts.
3. Montrer que f est continue si et seulement si tous ses ensembles de sous-niveau et ses ensembles de sur-niveau stricts sont ouverts.

Exercice 40. Soit $A \subset \mathbb{R}^n$ une partie non-vide de $\mathbb{R}^n$. Montrer que la fonction

$$\begin{aligned}
d(\cdot, A) : \quad \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R}\\
x &\longmapsto d(x, A) := \inf\{d(x, y) \mid y \in A\}
\end{aligned}$$

est continue.

Exercice 41. On définit la fonction partie entière par

$$E : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \max\{n \in \mathbb{Z} \mid n \leq x\}.$$

Déterminer si les ensembles suivants sont ouverts.

$$\begin{aligned}
\mathcal{A} &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid E(x) < 1 \text{ et } E(y) < 2\}\\
\mathcal{B} &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid E(x) \leq 1 \text{ et } E(y) \leq 2\}\\
\mathcal{C} &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid E(x) > 1 \text{ et } E(y) > 2\}\\
\mathcal{D} &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid E(x) > y,\ 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 1\}
\end{aligned}$$

Exercice 42. Soit $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ une fonction. On définit son graphe $\Gamma(f) \subset \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ par

$$\Gamma(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \mid y = f(x)\}.$$

1. Représenter les graphes de

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x^2, \quad g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto (x-1)^2 \text{ et } h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto (x-1)^2 + 1.$$

2. Représenter le graphe de $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x, y) \mapsto 25 - (x^2 + y^2)$.
3. Représenter le graphe de $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2, (x, y) \mapsto (\cos(x), \sin(x))$.

Exercice 43. Si f est continue, montrer que le graphe de f est fermé. La réciproque est-elle vraie ?

Exercice 44. On dit qu'une fonction continue $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ est *propre* si l'image réciproque de tout compact de $\mathbb{R}^n$ par f est compacte.

1. On suppose que f est une fonction continue telle que $\|f(x)\| \geq \|x\|$ pour tout $x \in \mathbb{R}^m$. Montrer que f est propre.
2. Soit f une fonction propre et (x_n) une suite à valeurs dans $\mathbb{R}^n$ telle que $\lim\|x_n\| = +\infty$. Montrer que $\lim\|f(x_n)\| = +\infty$.
3. Soit f une fonction propre. Montrer que l'image par f d'un fermé de $\mathbb{R}^m$ est un fermé de $\mathbb{R}^n$. On pourra utiliser l'exercice 27 du TD2.

Exercice 45. Soit $f : A \subset \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ une fonction uniformément continue. Soient (x_n) et (y_n) deux suites à valeur dans A telles que $\lim_{n\to\infty}(x_n - y_n) = 0$. Montrer que $\lim_{n\to\infty}(f(x_n) - f(y_n)) = 0$. Déterminer les intervalles de $\mathbb{R}^*$ sur lesquels la fonction $x \mapsto 1/x$ est uniformément continue.

Exercice 46. Soit $k \in]0, 1[$. Soit $f : A \subset \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^p$ une application k-contractante, c'est-à-dire que pour tout $(x, y) \in A \times A$, on a

$$\|f(x) - f(y)\| \leq k\|x - y\|.$$

On suppose de plus que $f(A) \subset A$.

1. Montrer que f est uniformément continue.
2. On s'intéresse à la suite définie par $u_0 \in A$ et la relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$.
   (a) Justifier que la suite (u_n) est bien définie.
   (b) Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

   $$\|u_{n+1} - u_n\| \leq k^n\|u_1 - u_0\|.$$

   (c) Montrer que la suite (u_n) est de Cauchy.
   (d) En déduire que f admet un point fixe.
3. Montrer que f admet un *unique* point fixe.