Formulaire de Probabilité

On considère une variable aléatoire réelle X sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

	CAS DISCRET	CAS CONTINU
Caractérisation de la loi de X	Distribution de probabilités $P(X = x),\ x \in X(\Omega)$	Densité de probabilités $f(x),\ x \in I\!R$
Fonction de répartition F_X de X $\forall x \in I\!R, F_X(x) = P(X \leq x)$	$F_X(x) = \sum_{\substack{u \in X(\Omega) \\ u \leq x}} P(X = u)$	$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f(u)du$
$E(X)$: Espérance mathématique de X	$\sum_{x \in X(\Omega)} xP(X = x)$	$\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx$
$V(X)$: Variance de X	$\sum_{x \in X(\Omega)} (x - E(X))^2 P(X = x)$	$\int_{-\infty}^{+\infty} (x - E(X))^2 f(x)dx$
$E(\psi(X))$: Espérance d'une fonction connue ψ de X	$\sum_{x \in X(\Omega)} \psi(x)P(X = x)$	$\int_{-\infty}^{+\infty} \psi(x)f(x)dx$
$m_k(X)$: Moment d'ordre k de X	$\sum_{x \in X(\Omega)} x^k P(X = x)$	$\int_{-\infty}^{+\infty} x^k f(x)dx$
$\mu_k(X)$: Moment centré d'ordre k de X	$\sum_{x \in X(\Omega)} (x - E(X))^k P(X = x)$	$\int_{-\infty}^{+\infty} (x - E(X))^k f(x)dx$
$\sigma(X)$: écart-type de X	$\sqrt{V(X)}$	$\sqrt{V(X)}$

Théorème de Koenig-Huyghens :

$$\forall a \in I\!R, \quad E((X-a)^2) = V(X) + (E(X)-a)^2$$

On notera aussi que $V(X) = E(X^2) - E^2(X)$.

Probabilité conditionnelle

Soit B un événement de probabilité non nulle, soit A un événement quelconque.
La probabilité de A sachant (ou conditionnellement à) B est notée $P(A \mid B)$ ou $P(A/B)$.
Elle vérifie :

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Formule des probabilités totales

Soit $(A_i)_{i \in I}$ un système complet d'événements c'est-à-dire une partition de Ω.
Pour tout événement B, on a

$$P(B) = \sum_{i \in I} P(B \cap A_i) = \sum_{i \in I} P(B \mid A_i) P(A_i).$$

Formule de Bayes ou probabilité des causes

Soit $(A_i)_{i \in I}$ un système complet d'événements, et B un événement de probabilité non nulle.
Alors :

$$P(A_i \mid B) = \frac{P(B \mid A_i) P(A_i)}{\sum_{i \in I} P(B \mid A_i) P(A_i)}.$$

Formule des probabilités composées

Soient n événements $A_1, \cdots, A_n$ tels que $P(A_1 \cap \cdots \cap A_n) \neq 0$. Alors :

$$P(A_1 \cap \cdots \cap A_n) = P(A_1) P(A_2 \mid A_1) P(A_3 \mid A_1 \cap A_2) \ldots P(A_n \mid A_1 \cap \cdots \cap A_{n-1}).$$

FORMULES POUR n TIRAGES DANS UNE URNE à N BOULES

	Tirages avec remise	Tirages sans remise
Urne à 2 catégories $N_1 = Np$ est le nombre de boules de catégorie 1	Formule binomiale $C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$	Formule hypergéométrique $\dfrac{C_{N_1}^k \times C_{N-N_1}^{n-k}}{C_N^n}$
Urne à K catégories $N_i = Np_i$ est le nombre de boules de catégorie i	Formule multinomiale $\dfrac{n!}{n_1! \ldots n_K!} \prod_{i=1}^{K} p_i^{n_i}$	Formule polyhypergéométrique $\dfrac{\prod_{i=1}^{K} C_{N_i}^{n_i}}{C_N^n}$

LOIS DE PROBABILITES DISCRETES CLASSIQUES

Dénomination	Loi de probabilité	Espérance	Variance	$X(\Omega)$
Loi Uniforme Discrète $\mathcal{U}([\![1,n]\!])$ $n \in I\!N^*$	$P_x = \frac{1}{n}$	$\frac{n+1}{2}$	$\frac{n^2-1}{12}$	$[\![1,n]\!]$
Loi de Bernoulli $\mathcal{B}(1,p)$ $p \in]0,1[$	$P_0 = 1-p$ et $P_1 = p$	p	$p(1-p)$	$\{0,1\}$
Loi Binomiale $\mathcal{B}(n,p)$ $n \in I\!N^*, p \in]0,1[$	$P_x = \frac{n!}{x!(n-x)!}p^x(1-p)^{n-x}$	np	$np(1-p)$	$[\![0,n]\!]$
Loi Hypergéométrique $\mathcal{H}(N,n,p)$ $(N,n,p) \in (I\!N^*)^2 \times]0,1[$	$P_x = \frac{C_{Np}^x C_{N(1-p)}^{n-x}}{C_N^n}$	np	$np(1-p)\frac{N-n}{N-1}$	$\subset [\![0,n]\!]$
Loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$ $\lambda \in I\!R_+^*$	$P_x = \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}$	λ	λ	$I\!N$
Loi Géométrique $\mathcal{G}(p)$ $p \in]0,1[$	$P_x = (1-p)p^{x-1}$	$\frac{1}{1-p}$	$\frac{p}{(1-p)^2}$	$I\!N^*$
Loi de Pascal $\mathcal{P}a(k,p)$ $k \in I\!N^*, p \in]0,1[$	$P_x = C_{x-1}^{k-1}(1-p)^k p^{x-k}$	$\frac{k}{1-p}$	$\frac{kp}{(1-p)^2}$	$[\![k,+\infty[\![$
Loi Binomiale Négative $\mathcal{BN}(k,p)$ $k \in I\!N^*, p \in]0,1[$	$P_x = C_x^{x+k-1} p^k (1-p)^x$	$\frac{k(1-p)}{p}$	$\frac{k(1-p)}{p^2}$	$I\!N$

Nombre d'échecs avant l'apparition de k succès
p : probabilité de succès

3

LOIS DE PROBABILITES CONTINUES CLASSIQUES

Dénomination	Loi de probabilité	Espérance	Variance	$X(\Omega)$
Loi Uniforme Continue $\mathcal{U}[a,b]$ $(a,b) \in I\!R^2,\ a < b$	$\frac{1}{b-a}\mathbf{1}_{[a,b]}(x)$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$	$[a,b]$
Loi Normale $\mathcal{N}(\mu,\sigma^2)$ $\mu \in I\!R, \sigma \in I\!R_+^*$	$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\exp\Big(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\Big)$	μ	σ^2	$I\!R$
Loi Exponentielle $\mathcal{E}(\lambda)$ $\lambda \in I\!R_+^*$	$\lambda\exp(-\lambda x)\mathbf{1}_{\mathbf{R}_+^*}(x)$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$	$[0,+\infty[$
Loi Log-Normale $\mathcal{LN}(\mu,\sigma^2)$ $\mu \in I\!R, \sigma \in I\!R_+^*$	$\frac{\mathbf{1}_{\mathbf{R}_+^*}(x)}{\sigma x\sqrt{2\pi}}\exp\Big(-\frac{(\log x-\mu)^2}{2\sigma^2}\Big)$	$e^{\mu+\frac{\sigma^2}{2}}$	$(e^{\sigma^2}-1)e^{2\mu+\sigma^2}$	$]0,+\infty[$
Gamma $\gamma(a,\lambda)$ $a \in I\!R_+^*, \lambda \in I\!R_+^*$	$\frac{\lambda^a x^{a-1}}{\Gamma(a)}e^{-\lambda x}\mathbf{1}_{\mathbf{R}_+^*}(x)$	$\frac{a}{\lambda}$	$\frac{a}{\lambda^2}$	$]0,+\infty[$
Khi-deux $\chi^2(n)$ $n \in I\!N^*,\ (\chi^2(n) = \gamma(\frac{n}{2},\frac{1}{2}))$	$\frac{x^{\frac{n}{2}-1}}{\Gamma(\frac{n}{2})2^{\frac{n}{2}}}e^{-\frac{x}{2}}\mathbf{1}_{\mathbf{R}_+^*}(x)$	n	$2n$	$]0,+\infty[$
Student $\mathcal{T}(n,\mu,\sigma^2)$ $n>0, \mu \in I\!R, \sigma>0$	$\frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})\left[1+\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2/n\right]^{-(n+1)/2}}{\sigma\ \Gamma(\frac{n}{2})\sqrt{n\pi}}$	μ si $n > 1$	$\left[\frac{n\sigma^2}{(n-2)}\right]$ si $n > 2$	$I\!R$
Fisher-Snédécor $\mathcal{F}(m,n)$ $m \in I\!N^*, n \in I\!N^*$	$\frac{n^{\frac{n}{2}}m^{\frac{m}{2}}x^{\frac{n}{2}-1}\mathbf{1}_{\mathbf{R}_+^*}(x)}{B(\frac{n}{2},\frac{m}{2})(m+nx)^{\frac{m+n}{2}}}$	$\frac{n}{n-2}$ si $n > 2$	$\frac{2n^2(m+n-2)}{m(n-2)^2(n-4)}$ si $n > 4$	$]0,+\infty[$
Cauchy $\mathcal{C}(a)$ $a \in I\!R_+^*$	$\frac{a}{\pi(a^2+x^2)}$	pas définie	pas définie	$I\!R$
Béta (α,β) $\alpha>0$ et $\beta>0$	$\frac{x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}}{B(\alpha,\beta)}$	$\frac{\alpha}{\alpha+\beta}$	$\frac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta)^2(\alpha+\beta+1)}$	$[0,1]$

$B(\alpha,\beta) = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}$; $\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} x^{\alpha-1}e^{-x}\,dx$